ریاضی

7

برائے جماعت ہفتم



بلوچستان ٹیکسٹ بک بورڈ کوئٹہ

ریاضی

برائے جماعت ہفتم





ناشر: نساء ٹریڈرز

برائے

بلوچستان ٹیکسٹ بک بورڈ کوئٹہ

عزیز طلباء

بلوچستان ٹیکسٹ بک بورڈ طلباء کے لئے درسی کُتب کی تیاری پر مامور ہے۔ بورڈ اس سلسلے میں نامور ماہرین تعلیم کی خدمات سے استفادہ کرتا ہے۔ جو شب و روز کی عرق ریزی کے بعد کتابوں کو آخری شکل دیتے ہیں۔ اگرچہ کتابوں کے مواد اور معیار کو بہتر بنانے کے لئے ہم مسلسل کوششیں کر رہے ہیں۔ اس کے باوجود بھی بہتری کی گُنجائش برقرار رہتی ہے۔ غلطیوں کے امکانات کو رد نہیں کیا جاسکتا۔ اس پس منظر میں طلباء اساتذہ کرام اور والدین سے گزارش ہے کہ وہ ہماری رہنمائی فرمائیں تاکہ ان کُتب کے معیار کو مزید بہتر بنایا جاسکے۔

پروفیسر منیر احمد خان کاکڑ

(چیئرمین)

بلوچستان ٹیکسٹ بک بورڈ کوئٹہ

فون: 850163

تیار کردہ ماڈل اسکول پروجیکٹ، السلام آباد، منظور کردہ محکمہ تعلیم حکومت بلوچستان
بطور واحد نصابی کتاب برائے مدارس صوبہ بلوچستان
بمطابق نوٹیفکیشن نمبر No-2308-36/10-Book 'GB (S) مورخہ
نظر ثانی شدہ: نیشنل ریویو کمیٹی وفاقی وزارت تعلیم حکومت پاکستان

تدوین نو

1- ڈاکٹر امداد حسین

2- ڈاکٹر محمد نواز

3- پروفیسر وحید اقبال

4- پروفیسر اخلاق الحسن

5- نذر محمد کاکڑ

6- پروفیسر سلیم اقبال

مدیر: ڈاکٹر امداد حسین

نگران طباعت: عصمت اللہ کاکڑ (ماہر مضمون)

کمپوزنگ: رہبر کمپیوٹر گرافکس

کمپوزر: عارف رشید

لے آوٹ ڈیزائننگ: عصمت اللہ کاکڑ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

فہرست

نمبر شمار	عنوان	صفحہ نمبر
1	سیٹ	1
2	سمتی اعداد	20
3	ناطق اعداد	28
4	جذر المربع	41
5	فیصد	49
6	نسبت تناسب	58
7	الجبرا	70
8	معلومات داری	103
9	جیومیٹری	114
10	جوابات	147

باب نمبر 1 سیٹ

تمہید

آپ غور کریں تو بیسویں صدی بہت سے انقلابات کی صدی تھی۔ خاص طور پر علم کی دنیا میں بہت سے انقلاب آئے۔ دوسرے مضامین کی طرح نئے تصورات اور عنوانات کا ریاضی میں بھی اضافہ ہوتا رہا۔ اس لئے نئی اصطلاحات اور نئی علامتیں وجود میں آئیں۔ سیٹ کے متعلق تصورات انیسویں صدی میں جارج کینٹر (George Cantor) کی سوچ کے نتیجے میں ایک نظریے کے طور پر وجود میں آئے اور بیسویں صدی میں ان تصورات نے ریاضی کی مختلف شاخوں کو آپس میں مربوط اور متحد کرنے کا اہم کردار ادا کیا۔ سیٹ کے تصورات کا استعمال ریاضی کی زبان کی حیثیت سے بڑھتا جا رہا ہے۔ اس لیے ریاضی کے ہر طالب علم کے لئے اس کا سمجھنا ضروری ہے۔ ہم یہاں آپ کو یہ بھی بتا دیں کہ سیٹ کے تصور کو سمجھنا مشکل نہیں ہے۔ ہماری زندگی کے معمول سے اس کا تعلق ہے۔ اس بات کو ہمیشہ یاد رکھیے کہ سیٹ کا تصور ریاضی کی دوسری شاخوں میں بہت زیادہ استعمال ہوتا ہے اور اس کی مدد سے ہم ریاضی کے دوسرے تصورات کو آسانی سے سیکھ سکتے ہیں۔ اس باب میں ہم مندرجہ ذیل تصورات سمجھیں گے :

(i) سیٹ کا مفہوم، اس کے ممبران اور اس کو پڑھنے کا طریقہ
(ii) سیٹ اور اس کے ممبران کو لکھنے کے لیے علامات
(iii) سیٹ کو لکھنے کے طریقے
(iv) متناہی اور غیر متناہی سیٹ
(v) متناہی سیٹوں کے ممبران کے درمیان مطابقت
(vi) دو متناہی سیٹوں میں ایک سے ایک کی مطابقت
(vii) مترادف اور غیر مترادف سیٹ۔

سیٹ کا مفہوم (Concept of a set)

عام زندگی میں ہم چیزوں کے مجموعے کے لیے کچھ نام استعمال کرتے ہیں، مثلاً طالب علموں کی جماعت، بھیڑوں کا ریوڑ، سات دنوں کا ہفتہ، چابیوں کا گچھا، کھلاڑیوں کی ٹیم وغیرہ۔ ہماری زبان میں اسی طرح کے اور بہت سے الفاظ ہیں جو چیزوں کے مجموعے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ اسی طرح ریاضی میں بھی واضح اور مختلف اشیاء یا تصورات کے مجموعے یا گروپ کے لیے 'سیٹ' کا لفظ استعمال ہوتا ہے۔

ریاضی کی زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں:

جماعت کے کمروں میں کرسیوں کا سیٹ، سڑک پر چلتی ہوئی کاروں کا سیٹ، اڑتے ہوئے پرندوں کا سیٹ، الماری میں رکھی ہوئی کتابوں کا سیٹ، چڑیا گھر کے جانوروں کا سیٹ وغیرہ۔ مزید وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیے:

ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ

احمد کی فیکٹری میں کام کرنے والے مزدوروں کا سیٹ

سکول میں ریاضی پڑھنے والے طلباء کا سیٹ

پاکستان کے صوبوں کا سیٹ

اعداد کے بھی مختلف سیٹ لیے جا سکتے ہیں مثلاً

ایک سے لے کر 10 تک صحیح اعداد کا سیٹ

20 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سیٹ

9 سے بڑے اور 21 سے چھوٹے جفت اعداد کا سیٹ

10- اور 5- کے درمیان منفی اعداد کا سیٹ

قدرتی اعداد کا سیٹ

سیٹوں کے نام

جس طرح ہم سب کسی نہ کسی نام سے پکارے جاتے ہیں اور ہر چیز کے لیے کوئی نہ کوئی نام ہوتا ہے۔ اسی طرح ہم سیٹوں کو بھی مختلف نام دیتے ہیں۔ سیٹوں کے ناموں کے لئے ہم انگریزی کے بڑے

حروف A, B, C, D, ... X, Y, Z استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً

ہفتے کے دنوں کے ناموں کا سیٹ	A =
احمد کی فیکٹری میں کام کرنے والے مزدوروں کا سیٹ	B =
سکول میں ریاضی پڑھنے والے طلباء کا سیٹ	C =
ایک سے لے کر دس تک صحیح اعداد کا سیٹ	X =
20 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سیٹ	Y =
صحیح اعداد کا سیٹ	Z =
قدرتی اعداد کا سیٹ	N =

سیٹ کے ارکان (Members of Set)

آپ نے کہتے ہوئے سنا ہو گا کہ فلاں صاحب صوبائی اسمبلی کے رکن ہیں یا وہ شخص کرکٹ کی قومی ٹیم کا رکن ہے۔ اس سے مراد یہ ہوتی ہے کہ پہلے صاحب صوبائی اسمبلی میں شامل ہیں اور اسی طرح دوسرے صاحب کرکٹ کی قومی ٹیم میں شامل ہیں، یعنی جب کوئی چیز کسی مجموعے یا گروپ میں شامل ہو تو وہ اس کا رکن یا ممبر کہلاتی ہے۔ اسی طرح وہ چیزیں جو کسی ایک سیٹ میں شامل ہوں، اس سیٹ کے ارکان کہلاتی ہیں۔

اوپر دیے ہوئے سیٹ A کے ارکان ہفتے کے دنوں کے نام ہونگے۔ سیٹ B کے ارکان احمد کی فیکٹری میں کام کرنے والے مزدوروں کے نام ہوں گے۔ اسی طرح سیٹ X کے ارکان ایک سے لے کر 10 تک صحیح اعداد ہوں گے۔ سیٹ Y کے ارکان 20 سے چھوٹے مفرد اعداد ہوں گے۔

نوٹ: اگر انگریزی کے حروف تہجی بطور ممبران لکھنے ہوں تو چھوٹے حروف استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً V = {a, i, o, u}

سیٹ کی خاصیتیں (Properties of Sets)

(1) سیٹ کے ارکان اتنے واضح ہوں کہ صاف معلوم ہو سکے کہ وہ سیٹ میں شامل ہیں یا نہیں، مثلاً سیٹ A میں صرف ہفتے کے دن شامل ہیں، کوئی اور چیز اس سیٹ کی رکن نہیں ہو سکتی۔ اگر ہم

کہیں کہ دلیر آدمیوں کا سیٹ تو یہ سیٹ واضح نہیں ہے کیونکہ اس میں ذاتی رائے کا دخل ہے۔

2. سیٹ کے تمام ارکان میں ایک یا چند باتیں مشترک ضرور ہوتی ہیں لیکن ان کے باوجود تمام ارکان کا ایک دوسرے سے مختلف ہونا نہایت ضروری ہے۔ مثلاً میری جیب کی چیزوں کے سیٹ میں رومال، قلم، چابیاں ہو سکتی ہیں۔

3. سیٹ کے ارکان کی ترتیب بدلنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔

4. سیٹ میں ہر رکن کو ایک ہی بار لکھا جاتا ہے۔

5. سیٹ کے ارکان کی تعداد پر کوئی پابندی نہیں ہوتی۔

سیٹ کا رکن ہونے یا نہ ہونے کی علامت

فرض کیجئے کہ

دس سے کم مثبت اعداد کا سیٹ = X

X کو سامنے رکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

عدد 9 رکن ہے X کا۔

اس بات کو ہم علامتی طور پر اس طرح لکھتے ہیں

$9 \in X$

'$\in$' سیٹ کا رکن ہونے کی علامت ہے

"عدد 8 رکن ہے X کا" کو علامتی طور پر لکھیں گے

$8 \in X$

جس طرح "$\in$" رکن ہونے کی علامت ہے اسی طرح $\notin$ رکن نہ ہونے کی علامت ہے۔

"عدد 11 رکن نہیں ہے X کا" کو علامتی طور پر لکھیں گے

$11 \notin X$

'عدد 12 رکن نہیں ہے X کا' کو علامتی طور پر لکھیں گے۔

$12 \notin X$

سرگرمی

کمرے میں چاروں طرف نظر دوڑائیں۔ کمرے کی چیزوں کے کم از کم دو مختلف سیٹ بنائیں۔ ہر سیٹ کو نام دیں۔ سیٹ کے ارکان کو علامتی طور پر لکھیں، جو چیزیں رکن نہیں ہیں ان کو بھی علامتی طور پر لکھیں۔

سیٹ کے لئے علامت

سیٹ کے اظہار یا لکھنے کے مختلف طریقے ہیں۔ جن میں ایک طریقہ یہ ہے کہ سیٹ کے ارکان درمیانی خطوط وحدانی { } کے اندر لکھ دیے جاتے ہیں۔

10 سے بڑے اور 30 سے چھوٹے مفرد اعداد کے سیٹ B کو اس طرح لکھیں گے۔

B = { 11,13,17,23,29}

درمیانی خطوط وحدانی میں سیٹ B کے تمام ارکان کو لکھ دیا گیا ہے۔ ہر رکن کے لکھنے کے بعد کومہ "(Comma)(,) کا نشان ڈالتے ہیں۔

سیٹ کو پڑھنے کا طریقہ

اگر A = {1,2,3,4} تو ہم سیٹ A کو اس طرح پڑھیں گے :

"سیٹ A مشتمل ہے 3,2,1 اور 4 پر"

اگر B = {a,b,c,d} تو B کو اس طرح پڑھیں گے :

"سیٹ B مشتمل ہے c,b,a اور d پر"

ارکان کو پڑھتے ہوئے آخری رکن سے پہلے "اور" لگاتے ہیں۔

C = {1,2,3,.........} سیٹ C مشتمل ہے 3,2,1 وغیرہ وغیرہ پر۔

مشق نمبر 1.1

(1) مندرجہ ذیل میں کون سے اجتماع سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں ؟

(i) سال کے بارہ مہینے۔

(ii) آپ کے سکول کے کرکٹ کے کھلاڑیوں کی ٹیم۔

(iii) خوبصورت برتن۔

(iv) بڑے اعداد۔

(v) مفرد اعداد۔

2 مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ نہیں ہیں:

(i) A = {a, b, c, d}

B = {ذہین لڑکیاں}

C = {1, 2, 3, 4, 4}

D = {5, 10, 15, 20, 25}

3 مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو $\in$ یا $\notin$ میں سے مناسب علامت لگا کر اس طرح مکمل کیجئے کہ بیان درست بن جائے:

(i) 5 ..... {2, 4, 6, 8} (ii) 12 ... {3, 6, 9, 12, 15}

(iii) -2 ... {-1, -2, -3, -4} (iv) 8 ... .. {1,3,5,7,9,11}

4 اگر A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6} تو بتائیے کہ کون سے بیانات درست ہیں

(i) $4 \in A$ (ii) $5 \in B$ (iii) $5 \in A$ (iv) $6 \notin A$

(v) $3 \in A$ (vi) $2 \in B$ (vii) $2 \notin A$ (viii) $6 \in A$

5 مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات درست ہیں:

(i) سیٹ کے ارکان کی ترتیب اہم نہیں ہوتی۔

(ii) کسی سیٹ میں شامل ارکان صرف ایک قسم کے ہوتے ہیں۔

(iii) ایک شے کسی ایک سیٹ میں بار بار شامل ہو سکتی ہے۔

(iv) سیٹ کے ارکان واضح ہونے چاہئیں۔

(v) $\in$ سیٹ کا رکن ہونے کی علامت ہے۔

سیٹ کو لکھنے کے طریقے (Writing a Set)

عام طور پر سیٹ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں :

(i) طریقہ اندراج (Tabulation Method)

(ii) طریقہ بیانیہ (Description Method)

طریقہ اندراج (Tabular Method)

اس طریقے میں سیٹ کے تمام ارکان کے نام یا ان کی تصویر درمیانی خطوط وحدانی میں ایک فہرست کی صورت میں پیش کر دیتے ہیں اور ممبران کے درمیان "," (Comma) ڈال دیا جاتا ہے۔ طریقہ اندراج میں سیٹ کو لکھنے کی مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

A = { [pictures: glass, cup, plate] }

B = {طاہر، اطہر، خالد، شوکت}

C = {1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8}

D = {a, b, c, d, e}

E = {1, 2, 3, 4, ..., 500}

سیٹ A کے ارکان کو تصویروں کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔ سیٹ B میں ارکان کے نام درج ہیں۔ اسی طرح سیٹ C اور D میں تمام ارکان کو درج کر دیا گیا ہے۔ سیٹ E میں ارکان کی تعداد 500 ہے۔ سیٹ E کے ارکان درج کیے جا سکتے ہیں لیکن اس کے لئے بہت زیادہ وقت کی ضرورت ہو گی۔ اس لیے آسانی کی خاطر چند ارکان لکھنے کے بعد تین نقطے لگا دیئے جاتے ہیں اور پھر دیے ہوئے اصول کے مطابق آخری رکن لکھ دیتے ہیں۔ پہلے چار ممبران لکھنے کے بعد نقطے لگانے کا مطلب یہ ہے کہ 4 کے بعد 5 آئے گا اور 5 کے بعد 6 اور اس طرح لکھنے کا سلسلہ جاری رہے گا، حتی کہ آخری رکن 500 پر پہنچ جائیں گے۔ قدرتی اعداد N کے سیٹ کو طریقہ اندراج میں اس طرح لکھتے ہیں۔

N = {1, 2, 3, 4, ...}

کیونکہ قدرتی اعداد کے سیٹ میں آخری ممبر معلوم نہیں، اس لئے شروع کے چند ارکان لکھنے کے بعد تین نقاط لگا دیتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ ارکان لکھنے کا سلسلہ جاری ہے جو کبھی ختم نہیں ہو گا۔

طریقہ بیانیہ (Descriptive Method)

اگر کسی سیٹ کے ارکان کو ان کی خاصیتوں کی مدد سے ایک فقرے کی صورت میں بیان کر دیا جائے تو اس طرح سیٹ کے اظہار کے اس طریقے کو بیانیہ طریقہ کہتے ہیں۔ اس طریقے میں خطوط وحدانی کا استعمال ضروری نہیں۔ مثلاً ہم نے پچھلے طریقے میں سیٹ C لیا تھا۔

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

اسے طریقہ بیانیہ میں اس طرح لکھیں گے:

پہلے آٹھ قدرتی اعداد کا سیٹ = C

'C' کی 'تعریفی خاصیت' یہ ہے کہ اس کے رکن پہلے آٹھ قدرتی اعداد ہیں۔ اس کے علاوہ اور کوئی ممبر اس سیٹ میں شامل نہیں ہو سکتا۔

اسی طرح $E = \{1, 2, 3, 4, ..., 500\}$

'E' کو طریقہ بیانیہ میں اس طرح لکھیں گے:

پہلے 500 قدرتی اعداد کا سیٹ = E

اگر $F = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

تو سیٹ 'F' کو طریقہ بیانیہ میں اس طرح لکھیں گے:

مفرد اعداد کا سیٹ = F

متناہی اور غیر متناہی سیٹ (Finite and Infinite Set)

[سیٹ کے ارکان کی تعداد پر کوئی پابندی نہیں ہوتی۔ سیٹ کے ارکان کی تعداد گنی بھی جا سکتی ہے اور یہ تعداد ایسی بھی ہو سکتی ہے جس کی گنتی ختم نہ ہو۔] اگر کسی سیٹ کے ارکان کی تعداد محدود ہو، یعنی گنی جا سکے تو اس کو متناہی سیٹ یا محدود (Finite Set) کہتے ہیں۔

محدود سیٹ کی مثالیں مندرجہ ذیل ہیں :

(i) {سال کے مہینے}

(ii) {پاکستانی جھنڈے میں رنگ}

(iii) {دس سے چھوٹے مثبت صحیح اعداد}

(iv) A = {2, 3, 4, 5}

(v) B = {2, 4, 6, 8, ..., 100}

آخری سیٹ B میں درمیان والے نقاط کا مطلب ہے کہ باقی کے ارکان اسی ترتیب کے مطابق لکھے جائیں جس طرح شروع میں ہیں۔ آخری ممبر 100 ہے۔

جس سیٹ کے ارکان کی گنتی کبھی ختم نہ ہو، یعنی جس سیٹ میں ممبران کی اصل تعداد معلوم نہ کی جاسکے 'غیر متناہی (Infinite Set) کہلاتا ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں سے غیر متناہی سیٹ کی شناخت واضح ہو جائے گی۔

(i) D = {2, 4, 6, ...}

(ii) W = {0, 1, 2, 3, ...}

(iii) N = {1, 2, 3, 4, ...}

(iv) $X = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\}$

یہاں پر نقاط کا مطلب ہے کہ باقی کے ارکان اسی ترتیب سے لکھے جائیں گے۔ کوئی رکن آخری نہیں ہے۔

مشق نمبر 1.2

(1) مندرجہ ذیل سیٹوں کو طریقہ اندراج میں لکھیں:

(i) A = انگلش کے پہلے آٹھ حروف تہجی کا سیٹ

(ii) B = پہلے پانچ مفرد اعداد کا سیٹ

(iii) C = -5 سے بڑے اور 3 سے چھوٹے اعداد کا سیٹ

(iv) D = 48 کے عادوں کا سیٹ

(v) E = 3 کے اضعاف کا سیٹ

(2) مندرجہ ذیل سیٹوں کو طریقہ بیانیہ میں لکھیں:

A = {1, 4, 9, 16, 25}

B = {10, 20, 30, 40, 50}

C = {a, b, c, d, e, f }

D = {2, 3, 5, 7, 11, ...}

(3) مندرجہ ذیل میں سے کون سے سیٹ متناہی اور کون سے غیر متناہی ہیں:

A = {8, 16, 24, 32, ...}

B = {-10, 8, -6, -4, -2}

C = {9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 }

N = {1, 2, 3, 4, ...}

W = {0, 1, 2, 3, ...}

X = {..., -4, -3, -1, 0, `, 2, 3, 4,...}

سیٹوں کا یونین اور تقاطع (Union and Intersection of Sets)

سیٹوں کا یونین (Union of Sets)

دو سیٹوں A اور B کا یونین ایسا سیٹ ہوتا ہے جو دونوں سیٹوں کے تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے' یونین کے لیے علامت "U" استعمال کی جاتی ہے۔ سیٹ A اور B کا یونین AUB سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس سیٹ کو A یونین B پڑھتے ہیں۔

مزید وضاحت کے لیے آیئے! کچھ مثالیں حل کرتے ہیں:

مثال 1:

اگر X = {1, 3, 5, 7}, Y = {2, 4, 6, 8} تو X U Y معلوم کریں۔

حل: XUY = {1, 3, 5, 7} U {2, 4, 6, 8}

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

مثال 2:

اگر K= {3,4,6,8}, L={3,5,7,8} تو KUL معلوم کریں۔

حل: KUL= {3,4,6,8} U {3,5,7,8}

= {3,4,,5,6,7,8}

یہاں 3 اور 8 سیٹ L اور K کے مشترک رکن ہیں۔ 4 اور 6 سیٹ K اور 5 اور 7 سیٹ L کے رکن ہیں، چونکہ سیٹ میں کسی رکن کو بار بار نہیں لکھا جاتا' اس وجہ سے دو سیٹوں کے یونین میں مشترک ممبران کو صرف ایک بار شامل کرتے ہیں۔

مثال 3:

اگر G = {3,4,5}, H = {5,4,3} تو HUG اور GUH معلوم کریں۔

حل: GUH = {3,4,5,} U {5,4,3}

$G \cup H=\{3,4,5\}$

$H \cup G=\{5,4,3\} \cup \{3,4,5\}$

$=\{3,4,5\}$

پس $G \cup H = H \cup G$

مثال4:

اگر $A=\{2,4,8,12\}, B=\{1,3,5,15\}$ تو $A \cup B$ اور $B \cup A$ معلوم کریں

حل : $A \cup B=\{2,4,8,12\} \cup \{1,3,5,15\}$

$=\{1,2,3,4,5,8,12,15\}$

$B \cup A=\{1,3,5,15\} \cup \{2,4,8,12\}$

$=\{1,2,3,4,5,8,12,15\}$

پس $A \cup B = B \cup A$

سیٹوں کا تقاطع (Intersection of Sets)

دو سیٹوں X اور Y کا تقاطع ایسا سیٹ ہوتا ہے جو دونوں سیٹوں کے مشترکہ ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔ تقاطع کی علامت کو ∩ سے ظاہر کیا جاتا ہے، مثلاً X اور Y کو $X \cap Y$ سے ظاہر کریں گے اور اس کو ہم X تقاطع Y پڑھتے ہیں۔

مثال5:

$X=\{1,3,6,8\}, Y=\{2,4,6,8\}$ تو $X \cap Y$ معلوم کریں۔

حل : $X \cap Y =\{1,3,6,8\} \cap \{2,4,6,8\}$

$=\{6,8\}$

کیونکہ X اور Y کے مشترک ارکان 6 اور 8 ہیں۔

مثال 6:
اگر $M=\{2,4,6,8,10\}, N=\{1,2,3,4,5,6\}$ تو $N \cap M$ معلوم کیجئے۔

حل :
$$M \cap N = \{2,4,6,8,10\} \cap \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$M \cap N = \{2,4,6\}$$

مثال 7:
$$A=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}, \quad B=\{6,12,18,24\}$$
تو $A \cap B$ اور $B \cap A$ معلوم کریں۔

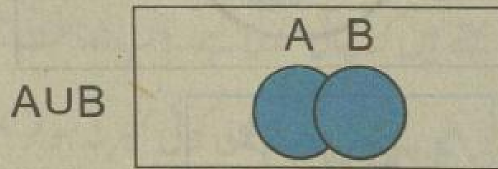
حل :
$$A \cap B = \{3,6,9,12,15,18,21,24\} \cap \{6,12,18,24\}$$
$$A \cap B = \{6,12,18,24\} \text{ ....(i)}$$
$$B \cap A = \{6,12,18,24\} \cap \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$$
$$B \cap A = \{6,12,18,24\} \text{ .....(ii)}$$

(i) اور (ii) سے ظاہر ہے کہ

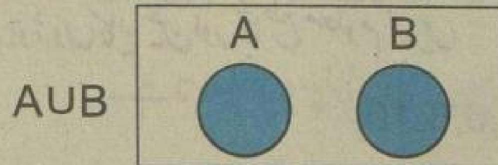
$B \cap A$ اور $A \cap B$

آیئے! اب ہم سیٹوں کا یونین اور تقاطع وین اشکال سے ظاہر کرتے ہیں۔

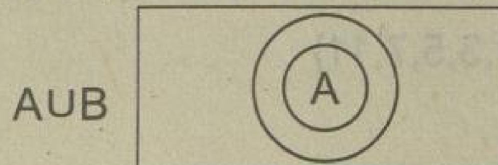
(i) جب سیٹ A اور B کے کچھ ارکان یا رکن مشترک ہوں تو A اور B کا یونین اس طرح ظاہر کرتے ہیں: سایہ دار حصہ A U B ہے۔



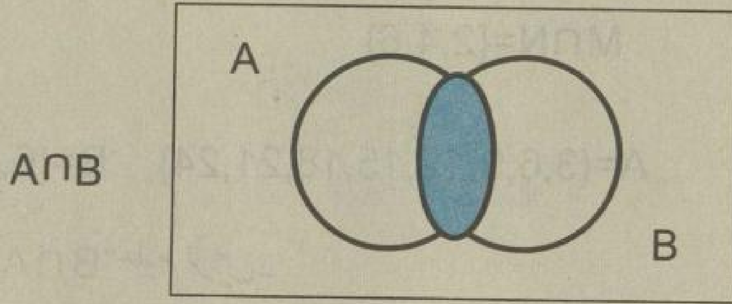
(ii) جب سیٹ A اور B کے ارکان مشترک نہ ہوں تو A اور B کا یونین اس طرح ظاہر کرتے ہیں :



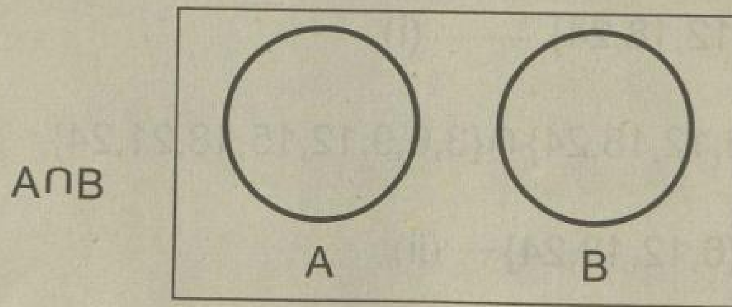
(iii) جب سیٹ A کے تمام ممبران سیٹ B میں ہوں تو AUB اس طرح ظاہر کریں گے :



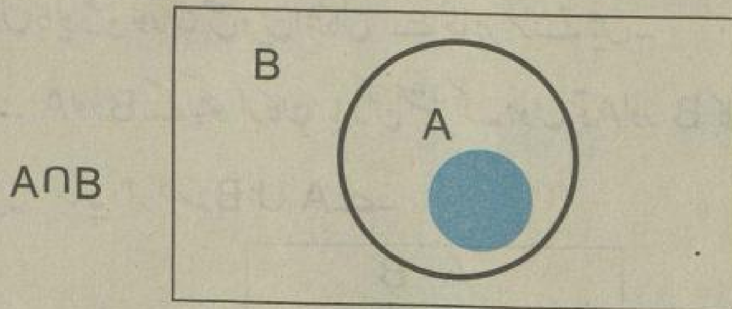
(iv) دو سیٹوں A اور B کا تقاطع جب A اور B میں کچھ ارکان مشترک ہوں ' اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ سایہ دار حصہ A ∩ B ہے۔



(v) دو سیٹوں A اور B کا تقاطع جب A اور B میں کوئی رکن مشترک نہ ہو تو اس طرح دکھایا جائے گا۔



(vi) دو سیٹوں A اور B کا تقاطع جب A کے تمام ممبر B میں شامل ہوں ' اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔



مشق نمبر 1.3

مندرجہ ذیل سیٹوں کے جوڑوں کا یونین اور تقاطع معلوم کریں :

1. A={4,5,6}, B={4,6,8,10}
2. A={0,1,,2,3,4} B={2,4,6,8}
3. A={1,3,5,7,9,11} B={1,3,5,7,11}

(4) A={a,b,c,d,e}   B={a,e,i,o,u}

(5) A={بدھ، جمعرات، جمعہ، ہفتہ} B={اتوار، پیر، منگل، بدھ، جمعرات}

(6) A= 2 کے پہلے 8 اضعاف کا سیٹ

B= 3 کے پہلے 6 اضعاف کا سیٹ

(7) A= پہلے 5 مثبت جفت اعداد کا سیٹ

B= پہلے 5 مثبت قدرتی اعداد کا سیٹ

(8) A= پہلے پانچ مفرد اعداد کا سیٹ

B= پہلے دس قدرتی اعداد کا سیٹ

(9) اگر A={1,2,3,4,5,6,7,8}, B={1,3,5,7}, C={2,4,6,8}

تو AUB اور AUC, A∩B, A ∩ C معلوم کریں

(10) اگر A={2,3,6,8,} B={a, b, c, 6} ہو تو کیا؟

(i) B∩A = A∩B (ii) AUB = BUA (iii) AUB = A B

خالی سیٹ (Empty Set)

جب پیالی سے چائے ختم ہو جائے تو ہم کہتے ہیں کہ پیالی خالی ہے۔ جب جماعت میں کوئی طالب علم نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ کمرہ جماعت خالی ہے۔ اسی طرح جب سیٹ میں کوئی ممبر نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ سیٹ خالی ہے۔ روزمرہ بول چال کی طرح لفظ 'خالی' سیٹ کی زبان میں تقریباً انہی معنوں میں استعمال ہوتا ہے۔

پس ایسا سیٹ جس میں کوئی ارکان نہ ہو، خالی سیٹ کہلاتا ہے۔

خالی سیٹ کو عام طور پر یونانی حرف ∅ (فائی) سے ظاہر کرتے ہیں۔ خالی سیٹ کے لیے { } علامت بھی استعمال ہوتی ہے۔

مثال 1:

اگر A={1,2,3,4} , B={5,6,7,8} تو $A \cap B = \emptyset$

کیونکہ سیٹ A اور B میں کوئی ممبر یار کن مشترک نہیں ہے۔

خالی سیٹ کی مندرجہ ذیل مثالیں دیکھیں:

(i) 5 اور 6 کے درمیان قدرتی اعداد کا سیٹ۔

(ii) ہفتے کے ان دونوں کا سیٹ جو حرف ن سے شروع ہوتے ہیں۔

(iii) ایسے طاق اعداد کا سیٹ جو 2 پر تقسیم ہو جاتے ہیں۔

سیٹوں کی خاصیت مبادلہ بلحاظ یونین اور بلحاظ تقاطع سیٹس

Commutative Property with respect to Union and Intersection Sets

جس طرح سے اعداد اور کسور میں خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع اور بلحاظ ضرب کے بارے میں آپ جانتے ہیں۔ اس طرح سے سیٹس میں بھی یہ خاصیت ہوتی ہے۔

اگر A اور B دو سیٹ ہیں تو خاصیت مبادلہ یونین اور تقاطع کی اس طرح سے لکھی جاتی ہے۔

خاصیت مبادلہ بلحاظ یونین

(Commutative Property w.r.t Union)

(1) $A \cup B = B \cup A$

خاصیت مبادلہ بلحاظ تقاطع

(Commutative Property w.r.t Intersection)

(2) $A \cap B = B \cap A$

مثال1:

اگر

$A = \{3,6,7,12,15,18,21,24\}$

$B = \{1,3,5,15\}$

(i) خاصیت مبادلہ بلحاظ یونین کی پڑتال کریں

(ii) خاصیت مبادلہ بلحاظ تقاطع کی پڑتال کریں

حل:

(i) $A = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$

$B = \{1,3,5,15\}$

$A \cup B = \{3,6,9,12,15,18,21,24\} \cup \{1,3,5,15\}$

$= \{1,3,5,6,9,12,15,18,21,24\}$

$B \cup A = \{1,3,5,15\} \cup \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$

$\{1,3,5,6,9,12,15,18,21,24\}$

پس $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = \{3,6,9,12,15,18,21,24\} \cap \{1,3,5,15\}$

$= \{3,15\}$

$B \cap A = \{1,3,5,15\} \cap \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$

$= \{3,15\}$

پس $A \cap B = B \cap A$

مثال 2:

$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(i) پڑتال کریں یونین کی خاصیت مبادلہ

(ii) پڑتال کریں تقاطع کی خاصیت مبادلہ

حل:

(i) $Z \cup N = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\}$

$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$N \cup Z = \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

پس $Z \cup N = N \cup Z$

(ii) $Z \cap N = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \cap \{1, 2, 3, \ldots\}$

$= \{1, 2, 3, \ldots\}$

$N \cap Z = \{1, 2, 3, \ldots\} \cap \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$= \{1, 2, 3, \ldots\}$

پس $Z \cap N = N \cap Z$

مثال 3:

$X =$ 100 سے چھوٹے مکمل اعداد کا سیٹ

$y =$ 100 تک مثبت طاق اعداد کا سیٹ

(i) یونین کی خاصیت مبادلہ کی پڑتال کریں

(ii) تقاطع کی خاصیت مبادلہ کی پڑتال کریں

حل : X = 100 سے چھوٹے مکمل اعداد کا سیٹ = {0,1,2,....99}

y = 100 تک مثبت طاق اعداد کا سیٹ = {1,3,5,....99}

(i) ZUY = {0,1,2,...99} U {1,3,5...99}

= {0,1,2,....,99}

YUX = {1,3,5,...99} U {0,1,2,...99}

= {0,1,2,...99}

پس XUY = YUX

(ii) X∩Y = {0,1,2,...99} {1,3,5,...99}

= {1,3,5,...99}

Y∩X = {1,3,5,...99} {0,1,2,...99}

= {1,3,5,....99}

پس X∩Y = Y∩X

مشق نمبر 1.4

مندرجہ ذیل سیٹوں کی خاصیت مبادلہ بلحاظ یونین اور تقاطع سیٹ کی پڑتال کریں۔

(i) A = {1,2,5,7} B = {5,6,7,8}

(ii) A = {3,1,5} B = {2,3,5,7}

(iii) A = {0,1,2} B = {-2,1}

(iv) A = {2,3,6,8} B = {a,b,c,d}

(v) A= 3 کے پہلے 8 اضعاف کا سیٹ B = 6 کے پہلے 6 اضعاف کا سیٹ

باب نمبر 2 سمتی اعداد

سمتی اعداد کی ضرب

درج ذیل چار بنیادی عوامل کو ہم جانتے ہیں

+ ، − ، × ، ÷

دو مثبت اعداد کا حاصل ضرب جمع کے عمل کے تکرار سے حاصل ہوتا ہے۔ مثلاً 4 x 3 یا تو 3 کو چار دفعہ جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے یا پھر 4 کو تین دفعہ جمع کرنے سے۔

3 x 4 = 4+4+4

یا

3 x 4 =	3+3+3+3		
4 x 3 =	3+3+3+3	=	12
3 x 3 =	3+3+3	=	9
2 x 3 =	3+3	=	6
1 x 3 =	3	=	3
0 x 3 =	0	=	0

اگر آپ ان مساوات کے بائیں اطراف سے پیدا ہونے والے پہلے کالم کے اعداد 1,2,3,4 کے پیٹرن پر غور کریں تو اس کالم میں ہر رقم اپنی پیش رو رقم سے '1' تفریق کر کے حاصل ہو رہی ہے۔ اور ان مساوات کے دائیں طرف کے اعداد 0,3,6,9,12 کے پیٹرن پر غور کریں تو ہر رقم اپنی پیش رو رقم سے '3' تفریق کر کے حاصل ہو رہی ہے۔ جبکہ مساوات کے بائیں طرف کے دوسرے کالم میں رقم '3' ہے جو کہ تبدیل نہیں ہو رہی ہے۔

لہذا ان دو کالموں کے اسی پیٹرن کو جاری رکھیں تو ہمیں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$-1 \times 3 = -3$$

$$-2 \times 3 = -6$$

$$-3 \times 3 = -9$$

$$-4 \times 3 = -12$$

$$-4 \times 3 = -12$$

لہذا

$$= -(|-4| \times |3|)$$

اسی طرح

$$4 \times (-3) = -(|4| \times |3|)$$

پس اگر a اور b دو سمتی اعداد ہوں اور ان میں ایک منفی اور دوسرا مثبت عدد ہو تو

$$ab = -(|a| \times |b|)$$

نوٹ کریں کہ مندرجہ بالا مثال میں

$$-1 \times 3 = -3$$

یہ نتیجہ عام طور پر درست ہے، یعنی اگر a کسی سمتی عدد کو ظاہر کرے تو

$$-1 \times a = -a$$

اگر دونوں اعداد منفی ہوں، مثلاً $-4 \times (-3)$ تو ان کا حاصل ضرب یوں حاصل ہوگا۔

اوپر دی گئی مثال کے مطابق

$$-4 \times 2 = -(|-4| \times |2|) = -8$$

4- کو تبدیل کئے بغیر ہم درمیانی کالم اور آخری کالم کا پیٹرن بناتے ہیں :

$$-4 \times 2 = -8$$

$$-4 \times 1 = -4$$

$$-4 \times 0 = 0$$

$$-4 \times -1 = 4$$

$$-4 \times (-2) = 8$$

درمیانی کالم کے اعداد کے پیٹرن میں ہر رقم اپنی پیش رو رقم سے "1" منہا کر کے حاصل ہوتی ہے اور آخری کالم میں ہر رقم اپنی پیش رو رقم میں 4 جمع کر کے حاصل ہو رہی ہے۔

لہٰذا $-4 \times (-3) = |4| \times |3|$

پس ظاہر ہوا کہ 2 منفی اعداد کا حاصل ضرب مثبت عدد ہوتا ہے۔ اگر a اور b دونوں منفی اعداد ہوں تو

$$a \times b = |a| \times |b|$$

سرگرمی:

مندرجہ بالا طریقے سے ثابت کریں کہ

(i) $(-3)(-3) = 9$

(ii) $(-4)(-5) = 20$

سمتی اعداد کی تقسیم

ہم جانتے ہیں کہ

$6 \div 2 = 3$ کیونکہ $2 \times 3 = 6$

اسی طرح اگر ہمیں 6 کو 2- سے تقسیم کرنا ہو تو وہ سمتی عدد تلاش کرنا ہوتا ہے جس کا 2- سے حاصل ضرب 6 ہو، یعنی ہمیں مندرجہ ذیل میں خالی جگہ کو مناسب سمتی عدد سے پر کرنا ہے۔

$$\square \times (-2) = 6$$

ظاہر ہے کہ ایسا سمتی عدد صرف (3-) ممکن ہے۔ لہٰذا

$$6 \div (-2) = -3$$

اگر ہمیں [(2) ÷ (6-)] معلوم کرنا ہو تو ہم مندرجہ ذیل میں خالی جگہ پر کرتے ہیں:

$$2 \times \square = -6$$

خالی جگہ صرف (3-) سے پر ہو سکتی ہے، لہٰذا $(-6) \div 2 = -3$

اب ہم ایسی مثال لیتے ہیں جس میں دونوں اعداد منفی ہیں، یعنی $(-6) \div (-2)$

اس صورت میں ہم $\square \times (-2) = -6$ میں خالی جگہ صرف 3 + سے پر کر سکتے ہیں

لہذا $(-6) \div (-2) = +3$

مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ سمتی اعداد a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تو

$$a \div b = |a| \div |b|$$

اگر a یا b میں سے ایک عدد منفی ہو تو

$$a \div b = -(|a| \div |b|)$$

مندرجہ بالا قاعدے میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ a,b کو پورا پورا تقسیم کر رہا ہے۔

مثال1: $(-27) \div (+3)$ معلوم کریں۔

حل: $(-27) \div (+3)$

$= -(|-27|) \div (|+3|)$

$= -(27 \div 3)$

$= -9$

مثال2: $-16 \div -4$ معلوم کریں۔

حل: $(-16) \div (-4)$

$= (|+-16| \div |-4|)$

$= -(|16| \div |-4|)$

$= (|16| \div |-4|)$

$16 \div 4$

$= 4$

مشق نمبر 2.1

(1) ذیل میں دیئے گئے اعداد کا حاصل ضرب معلوم کریں :

(i) -8, 11 (ii) 28, -7 (iii) -7, -14

(iv) 9, -12 (v) -6, 0 (vi) 4, -200

(2) خالی جگہ پر کریں :

(i) 24 ÷ 3 = ______

(ii) 140 ÷ (-10) = ______

(iii) -80 ÷ (+4) = ______

(iv) -140 ÷ (-7) = ______

(v) (-12) ÷ (-12) = ______

(vi) 0 ÷ (+4) = ______

(3) معلوم کریں :

(i) (+6) x (+4)

(ii) 24 ÷ (+4)

(iii) (-4) x (-2)

(iv) (+6) ÷ (-3)

(v) (-20) ÷ (-10)

(vi) (+20) ÷ (-5)

4 اگر a,b,c سمتی اعداد کو ظاہر کریں تو کیا مندرجہ ذیل نتائج درست تصور کیے جاسکتے ہیں؟
(آپ حسب منشا a,b اور c کے لیے سمتی اعداد لیں اور پڑتال کر کے دیکھیں)

(I) (خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع) $a + b = b + a$

(ii) (خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب) $ab = ba$

(iii) (خاصیت تلازم بلحاظ جمع) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(iv) (خاصیت تلازم بلحاظ ضرب) $a (bc) = (ab)c$

(v) (خاصیت تقسیمی) $a(b+c) = (ab + bc)$

(vi) (خاصیت تقسیمی) $(a+b)c = (ac + bc)$

(vii) (خاصیت تلازم بلحاظ تفریق) $a - (b-c) = (a-b) - c$

(viii) (خاصیت تلازم بلحاظ تقسیم) $a / (b / c) = (a / b) / c$

بنیادی عوامل کی ترتیب اور خطوط وحدانی کا استعمال

آپ نے پڑھا ہو گا کہ چار بنیادی عوامل کے علاوہ اردو کا لفظ "کا" بھی ضرب کے لیے استعمال ہوتا ہے جب کسی زیر غور مسئلے میں چار عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے علاوہ ایک اور عمل "کا" کا استعمال ہو تو ان کی ترتیب اس طرح ہو گی :

(i) کا (ii) تقسیم (iii) ضرب (iv) جمع یا تفریق

آپ پچھلی جماعتوں میں خطوط وحدانی کا استعمال سیکھ چکے ہیں۔ اعادے کی خاطر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب لکھیں :

(i) ( ) کا نام________ ہے۔

(ii) { } کا نام________ ہے۔

(iii) [ ] کا نام________ ہے۔

انگریزی میں ( ) کو Parantheses ، { } کو Braces اور [ ] کو بریکٹ کہتے ہیں۔ ہم بھی آئندہ سے [ ] کو بریکٹ ہی لکھیں گے۔

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ اگر کسی مسئلے میں ایک سے زیادہ خطوط وحدانی استعمال ہوں تو سب سے پہلے قوسین کے اندر کی رقوم کو مختصر کرتے ہیں' اس کے بعد درمیانی خطوط وحدانی { } کے اندر کی رقوم کو اور پھر بریکٹ کے اندر کی رقوم کو مختصر کرتے ہیں۔ ان باتوں کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں میں کی گئی ہے:

مثال 1: $64 \div (-16) \times 6 \div 2 + 8$ کو مختصر کریں

حل: $64 \div (-16) \times 6 \div 2 + 8$

پہلے تقسیم کا عمل کیا $= -4 \times 3 + 8$

ضرب کا عمل کیا $= -12 + 8$

جمع کا عمل کیا $= -4$

مثال 2: $32 \times 8 \div (-4) -5 + 7$

حل: $32 \times 8 \div (-4) -5 + 7$

پہلے تقسیم کا عمل کیا $= 32 \times (-2) - 5 + 7$

ضرب کا عمل کیا $= -64 - 5 + 7$

جمع کا عمل کیا $= -69 + 7$

جمع کا عمل کیا $= -62$

مثال 3: $10 + [2 \{-9 \div (1 + 2)\}]$ کو مختصر کریں۔

حل: پہلے قوسین کے اندر کی رقوم کو مختصر کیا $10 + [2 \{-9 \div (1+2)\}]$

پھر درمیانی خطوط وحدانی کی اندر کی رقوم کو مختصر کیا $= 10 + [2 \{-9 \div 3\}]$

اب بریکٹ کے اندر کی رقوم کو مختصر کیا $= 10 + [2 \times (-3)]$

جمع کا عمل کیا $= 10 + (-6)$

$= 4$

مثال 4: 6 - 2 {8 - (7-2)} کو مختصر کریں۔

حل: پہلے قوسین کے اندر کی رقوم کو مختصر کیا $6-2\{8-(7-2)\}$

پھر درمیانی خطوط وحدانی کی اندر کی رقوم کو مختصر کیا $= 6-2\{8-5\}$

ضرب کا عمل کیا $= 6 - 2 \times 3$

تفریق کا عمل کیا $= 6 - 6$

$= 0$

مشق نمبر 2.2

مختصر کریں۔

(i) $32 \times 8 \div (-4)$

(ii) $-32 \div 4 \times 8$

(iii) $5 \times 16 \div (-8) \times 2$

(iv) $125 \div 25 \times 6$

(v) $33 - 9 \div 3$

(vi) $25 - 4 \div 2 \times (-5)$

(vii) $8 \times (-28) \div 14 + 5 - 6 \div 3$

(viii) $1000 \div (-25 \times 4)$

(ix) $7 - (30 + 5) \div 7$

(x) $20 + \{(-15) + 4(10 - 5)\}$

(xi) $10 - \{(15 + 5) - (10 + 5)\}$

(xii) $32 \div 10 - \{5 - (4 - 1)\}$

(xiii) $6 \div [5\{6 \div (5 - 2)\}]$

باب نمبر 3 ناطق اعداد

تمہید

اگر آپ سوچیں کہ اب تک آپ ریاضی کے چھوٹے مسائل حل کرنے کیلئے کونسا بنیادی تصور استعمال کرتے رہے ہیں تو آپ کا جواب ہو گا کہ ہم ریاضی میں اعداد استعمال کرتے ہیں۔ ریاضی کے ہر تصور کو سیکھنے کیلئے ہم اعداد استعمال کرتے ہیں۔ اعداد کی مختلف اقسام ہوتی ہیں۔ آپ سمتی اعداد یا صحیح اعداد پڑھ چکے ہیں۔ اب ہم ناطق اعداد (Rational Numbers) کے بارے میں پڑھیں گے۔

ناطق اعداد کی تعریف (Definition of Rational Numbers)

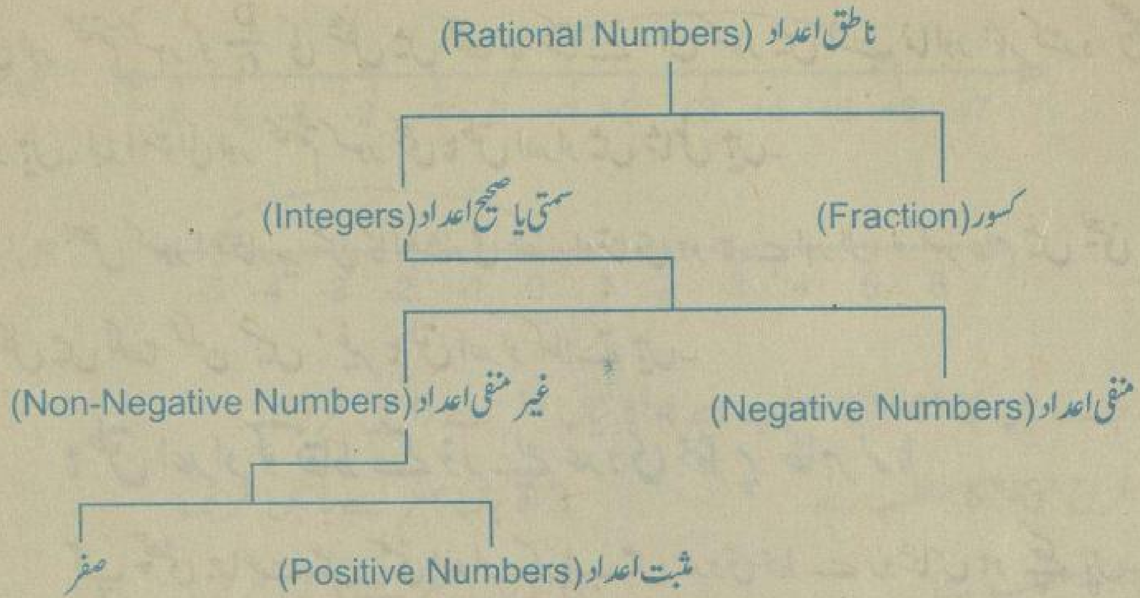
آپ چھٹی جماعت میں مختلف قسم کے اعداد پڑھ چکے ہیں، مثلاً قدرتی اعداد 1,2,3 وغیرہ جن کو ہم گنتی میں سیکھتے ہیں۔ آپ نے یہ بھی پڑھا تھا کہ ....,1,2,3 کو ....,+1,+2,+3 بھی لکھتے ہیں اور ان کو مثبت اعداد کہتے ہیں۔ اسی طرح ....,-1,-2,-3 کو منفی اعداد کہتے ہیں۔ مثبت اعداد اور منفی اعداد میں صفر شامل نہیں ہوتی۔ سمتی اعداد جن کو صحیح اعداد بھی کہتے ہیں، یہ تمام منفی اعداد، صفر اور تمام مثبت اعداد پر مشتمل ہوتے ہیں، یعنی

...... -3, -2, -1, 0, 1,2,3,.......

سمتی اعداد ہیں۔ ان کو انگریزی میں Directed Numbers یا Integers کہتے ہیں۔

اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ وہ اعداد جو کسورِ عام یعنی $1\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5}$ وغیرہ اور کسور اعشاریہ یعنی 1.5 , 2.79 وغیرہ سے ظاہر کیے جائیں، وہ کس قسم میں شامل کیے جاتے ہیں؟ اس کے علاوہ کسور بھی مثبت اور منفی علامات کے ساتھ ہوتی ہیں۔

آپ نے شجرہ نسب کا لفظ سنا ہو گا۔ اس میں خاندان کے افراد کا اپنے باپ دادا سے رشتہ ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح ہم عددی نظام کا شجرہ نسب بناتے ہیں۔ اس پورے نقشے سے آپ پر واضح ہو گا کہ ناطق اعداد کس قسم کے اعداد سے مل کر بنتے ہیں۔



آیئے! اب ہم ناطق اعداد کی تعریف کرتے ہیں۔

ناطق اعداد میں تمام صحیح اعداد اور کسور شامل ہوتی ہیں۔ کوئی بھی ناطق عدد دو صحیح اعداد p اور q کی کسر کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جہاں p شمار کنندہ اور q نسب نما ہو۔ $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے جبکہ $q \neq 0$

ناطق اعداد میں صفر، مثبت اعداد، کسورِ عام، کسور اعشاریہ، متوالی اور مختتم کسور اعشاریہ شامل ہیں۔

یہاں آپ نوٹ کیجیے کہ اگر عدد $\frac{p}{q}$ میں $P = 0$ ہو تو یہ عدد صفر ہو گا۔

آپ نے چھٹی جماعت میں پڑھا تھا کہ متوالی کسر ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں چند ہندسے بار بار ایک ہی ترتیب سے آتے ہیں، مثلاً

$$0.333 .... = \frac{1}{3}$$

$$1.666 .... = \frac{5}{3}$$

مختتم کسر اعشاریہ میں کسری حصے کی تعداد متناہی یا ختم ہونے والی ہوتی ہے، مثلاً

$$4.012 = \frac{4012}{1000}$$

$$2.25 = \frac{9}{4}$$

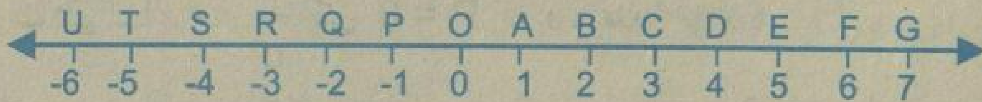
متوالی اور مختتم کسور کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ ان کسور میں نسب نما اور شمار کنندہ صحیح اعداد ہیں۔ لہذا متوالی اور مختتم کسور بھی ناطق اعداد میں شامل ہیں۔

بعض کسور اعشاریہ جن کا اعشاری حصہ لامتناہی ہوتا ہے اور ان کو کسر عام میں یعنی $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھنا ممکن نہیں، غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

ناطق اعداد کو نقاط کے ذریعے عددی خط پر ظاہر کرنا

آپ چھٹی جماعت میں سمتی اعداد کے باب میں عددی خط سے روشناس ہو چکے ہیں۔ آیئے! دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کو نقاط کے ذریعے عددی خط پر کس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

عددی خط بنانے کے لیے کوئی ایک خط لے کر اس پر ایک نقطہ O لیں جسے نقطہ آغاز یا زیرو پوائنٹ کہتے ہیں۔ خط پر کوئی سا نقطہ A لے کر $\overline{OA}$ کی لمبائی کو ایک اکائی مان لیں۔ اس اکائی کے مطابق O کے دونوں طرف نقاط کے نشان لگائیں۔ دائیں جانب والے نقاط کو .... ,1,2,3 وغیرہ سے ظاہر کریں۔ اسی طرح بائیں جانب والے نقاط کو .... ,-3 ,-2 ,-1 وغیرہ سے ظاہر کریں، جبکہ نقطہ O صفر کو ظاہر کرتا ہے۔

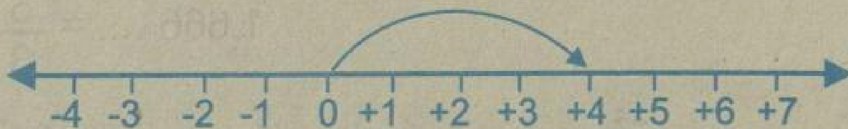


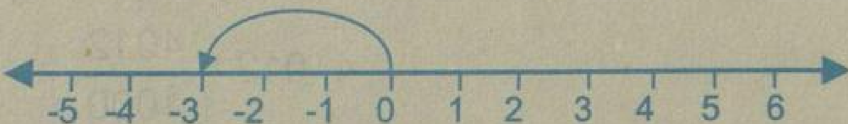
آیئے اب ہم مثالوں کے ذریعے اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں۔

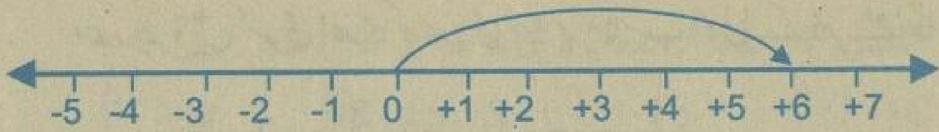
مثال1: مناسب اکائی لے کر مندرجہ ذیل کو عددی خط پر ظاہر کریں

(i) +4, (ii) -3, (iii) +6, (iv) -5

حل:









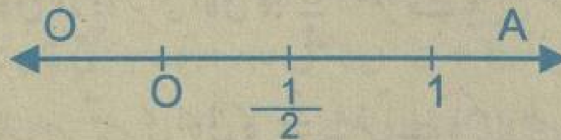
آپ جانتے ہیں کہ "4+" کا مطلب ہے 4 اکائیاں صفر سے دائیں طرف۔

اسی طرح "3-" کا مطلب ہے 3 اکائیاں صفر سے بائیں طرف

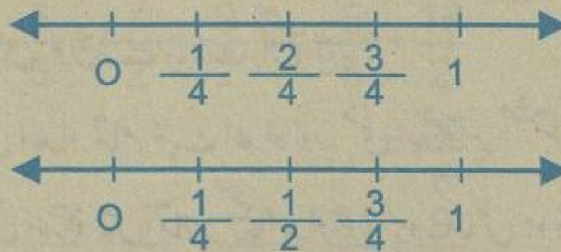
"6+" کا مطلب ہے 6 اکائیاں صفر سے بائیں طرف

اور "5-" کا مطلب ہے 5 اکائیاں صفر سے بائیں طرف

آپ نے چھٹی جماعت میں عددی خط پر نقاط کے ذریعے کسری اعداد کے اظہار کا طریقہ بھی سیکھا تھا۔ عددی خط پر نقاط O اور A ایک یونٹ کو ظاہر کرتے ہیں۔ سکیل کی مدد سے O اور A کے درمیانی فاصلے، یعنی ایک یونٹ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ تقسیم کرنے والے نقطے کو آدھا یعنی $\frac{1}{2}$ ظاہر کرتے ہیں۔



اب عددی خط پر OA یعنی ایک یونٹ فاصلے کو 4 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ تقسیم کرنے والے نقاط کو کسری اعداد $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ظاہر کرتے ہیں۔

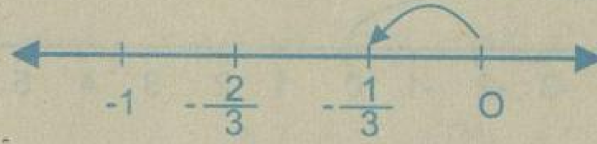


اسی طرح ہم تمام مثبت کسور کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ منفی کسور کو "O" کے بائیں طرف ظاہر کیا جاتا ہے۔

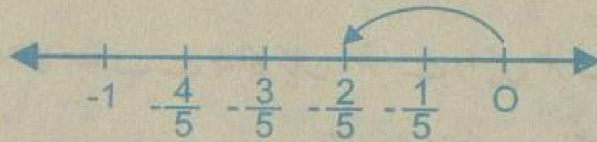
مثال 1: مندرجہ ذیل کسری اعداد کو عددی خط پر مناسب اکائی کے ذریعے ظاہر کریں:

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -1\frac{3}{4}, -2\frac{1}{6},$$

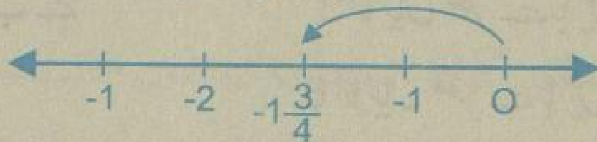
شکل نمبر 1



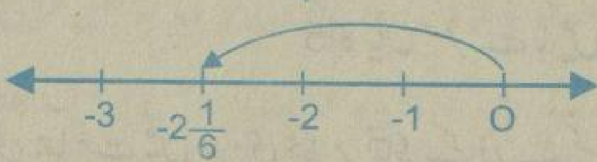
شکل نمبر 2



شکل نمبر 3



شکل نمبر 4



پہلی شکل میں اکائی کا $\frac{1}{3}$ صفر سے بائیں طرف ہے۔

دوسری شکل میں اکائی کا $\frac{2}{5}$ صفر سے بائیں طرف ہے۔

تیسری شکل میں ایک اکائی اور دوسری اکائی کا $\frac{3}{4}$ صفر سے بائیں طرف ہے۔

چوتھی شکل میں دو اکائیاں اور تیسری اکائی کا $\frac{1}{6}$ صفر سے بائیں طرف ہے۔

مشق نمبر 3.1

① مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات صحیح ہیں؟

(i) سمتی اعداد تمام مثبت اعداد اور منفی اعداد پر مشتمل ہوتے ہیں۔

(ii) ناطق اعداد میں تمام صحیح اعداد اور کسور شامل ہوتی ہیں۔

(iii) اگر p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq o$ تو $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہوگا۔

(iv) اگر p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q = 1$ تو $\frac{p}{q}$ صحیح عدد ہے۔

(v) متوالی کسور ناطق اعداد میں شامل ہیں۔

② مناسب اکائی لے کر مندرجہ ذیل کو عددی خط پر ظاہر کریں:

(i) -8 (ii) +5 (iii) -15 (iv) +9

③ مندرجہ ذیل اعداد کو عددی خط پر ظاہر کریں:

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ (iii) $3\frac{3}{4}$

ناطق اعداد کے خواص (Properties of Rational Numbers)

ٹیچر ناطق اعداد کے خواص سرگرمیوں کی مدد سے کرائیں۔ اس کے بعد درج ذیل خواص کا مطالعہ کرائیں۔

جمع کے قاعدے میں ناطق اعداد کے خواص

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

ہمیں معلوم ہے کہ :

$$9 + 17 = 26$$

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{7} = \frac{41}{70}$$

اگر ہم دو ناطق اعداد کو جمع کریں تو حاصل ہونے والا عدد بھی ناطق ہوگا، یعنی اگر a اور b ناطق اعداد ہوں تو a + b بھی ناطق عدد ہوگا۔ یہ جمع میں ناطق اعداد کی خاصیت بندش (Closure Property) کہلاتی ہے۔

(ii) خاصیت تلازم (Associative Property)

اگر $\frac{5}{3}$ ، $\frac{7}{2}$ اور $\frac{9}{2}$ کوئی سے تین ناطق اعداد ہوں تو

$$\frac{5}{3}+(\frac{7}{2}+\frac{9}{2}) = \frac{5}{3}+\frac{16}{2}$$

$$= \frac{58}{6}$$

$$(\frac{5}{3}+\frac{7}{2})+\frac{9}{2} = \frac{31}{6}+\frac{9}{2}$$

$$= \frac{58}{6}$$

یعنی

$$\frac{5}{3} + (\frac{7}{3}+\frac{9}{2}) = (\frac{5}{3}+\frac{7}{2})+\frac{9}{2}$$

تین صحیح اعداد کو جمع کرنا ہو تو ان میں سے کسی دو اعداد کو جمع کر کے اس کے مجموعے میں تیسرا عدد جمع کرتے ہیں، یعنی اگر c,b,a ناطق اعداد ہوں تو $a + (b + c) = (a + b) + c$ یہ جمع کے قاعدے میں ناطق اعداد کی خاصیت تلازم کہلاتی ہے۔

(iii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

اگر 9 اور 11 کوئی سے دو ناطق اعداد ہوں تو

$$9 + 11 = 11 + 9$$

اسی طرح

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}$$

یعنی پہلے عدد میں دوسرا عدد جمع کریں یا دوسرے عدد میں پہلا عدد جمع کریں، حاصل جمع برابر ہو گا۔ یہ جمع کے قاعدے میں ناطق اعداد کی خاصیت مبادلہ کہلاتی ہے۔

یعنی دو ناطق اعداد کو جمع کرتے وقت ان کی ترتیب بدلنے سے مجموعے پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اگر a اور b ناطق اعداد ہوں تو $a + b = b + a$

(iv) جمعی ذاتی عنصر (Additive Identity)

ناطق اعداد میں ایک ناطق عدد "0" ایسا ہے جس کو کسی بھی ناطق عدد میں جمع کریں تو حاصل جمع وہی عدد رہتا ہے۔

مثلاً $\frac{5}{7}$ ایک ناطق عدد ہے

$$\frac{5}{7} + 0 = \frac{5}{7} = 0 + \frac{5}{7}$$

اور $7.01 + 0 = 7.01 = 0 + 7.01$

پس ناطق اعداد میں صفر جمعی ذاتی عنصر ہے۔

(v) جمعی معکوس (Additive Inverse)

ہر ناطق عدد a کے لئے ایک اور صرف ایک ناطق عدد b ایسا ہے جس کو اس عدد میں جمع کرنے سے جمعی ذاتی عنصر حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $a + b = 0$ اس صورت میں ہم b کو a کا

جمعی معکوس کہتے ہیں اور اسے $-a = b$ لکھتے ہیں۔

ناطق عدد $\frac{8}{9}$ کا جمعی معکوس $-\frac{8}{9}$ ہے۔

کیونکہ $\frac{8}{9} + (-\frac{8}{9}) = 0$

اور اسی طرح 7 کا جمعی معکوس 7- ہے۔

کیونکہ $7 + (-7) = 0$

ضرب کے قاعدے میں ناطق اعداد کے خواص

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

ناطق اعداد میں سے کسی دو اعداد کا حاصل ضرب بھی ایک ناطق عدد ہوتا ہے' مثلاً $.4 \times .5 = 0.2$
اگر a اور b دو ناطق اعداد ہوں تو a اور b کی باہمی ضرب سے ہمیں ab حاصل ہوتا ہے جو ناطق عدد ہے۔ پس ناطق اعداد میں خاصیت بندش بلحاظ ضرب پائی جاتی ہے۔

(ii) خاصیت تلازم (Associative Property)

اگر تین ناطق اعداد کو ضرب دینا ہو تو ان میں سے کسی دو اعداد کو ضرب دے کر حاصل ضرب کو تیسرے عدد سے ضرب دیتے ہیں' یعنی اگر c,b,a ناطق اعداد ہوں تو

$$a(bc) = (ab)c$$

مثلاً

$$\frac{1}{2} \times (\frac{7}{8} + \frac{3}{4}) = (\frac{1}{2} + \frac{7}{8}) \times \frac{3}{4}$$

(iii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

دو ناطق اعداد کو ضرب دیتے وقت' ان کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب میں کوئی تبدیلی نہیں آتی' یعنی اگر a`b ناطق اعداد ہوں تو a کو b سے ضرب دیں یا b کو a سے ضرب دیں جواب ایک ہی رہے گا یعنی $ab = ba$

مثلاً

$$\frac{7}{9} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{27} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{9}$$

(iv) ضربی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity)

ناطق اعداد میں ناطق عدد "1" ایسا عدد ہے جسے کسی ناطق عدد سے ضرب دینے سے جواب وہی عدد آتا ہے، مثلاً $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3}$

عدد "1" ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

(v) ضربی معکوس (Multiplicative Inverse)

صفر کے علاوہ ہر ناطق عدد a کے لئے ایک ایسا ناطق عدد b موجود ہے جسے پہلے ناطق عدد سے ضرب دینے سے حاصل ضرب "1" یعنی ضرب کا ذاتی عنصر حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $a\,b = 1$

اسی صورت میں ہم b کو a کا ضربی معکوس کہتے ہیں اور اسے $b = \frac{1}{a}$ لکھتے ہیں۔

مثلاً $2 \times \frac{1}{2} = 1$ لہٰذا $\frac{1}{2}$ کو 2 کا ضربی معکوس کہتے ہیں۔

نوٹ: صفر کا کوئی ضربی معکوس نہیں ہوتا کیونکہ ناطق اعداد میں کوئی عدد ایسا نہیں ہے جسے صفر سے ضرب دینے سے جواب "1" آئے۔ جس ناطق عدد کو ہم صفر سے ضرب دیں گے، وہ صفر ہو جائے گا۔ اگر a ناطق عدد ہے تو $a \times 0 = 0$

(vi) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

(Distributive Property of Multiplication over Addition)

دو ناطق اعداد کے مجموعے کو تیسرے ناطق عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب وہی عدد آئے گا جو پہلے دو ناطق اعداد کو تیسرے ناطق عدد سے الگ الگ ضرب دے کر ان حاصل ضربوں کو جمع کرنے پر آتا ہے۔ اگر b,a اور c ناطق اعداد ہوں تو $a\,(b+c) = ab + ac$

اور $(b+c)\,a = ba + ca$

مثلاً

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

یا

$$\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

مشق نمبر 3.2

(1) بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں ناطق اعداد کی کونسی خاصیتیں استعمال ہوئی ہیں:

(1) $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}=\frac{8}{9}+\frac{5}{6}$

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{7}+(\frac{4}{5}+\frac{2}{3})=(\frac{1}{7}+\frac{4}{5})+\frac{2}{3}$

(4) $99+0=99$

(5) $12\times\frac{1}{12}=1$

(6) $100\times 1=100$

(7) $\frac{3}{4}\times\frac{11}{7}=\frac{11}{7}\times\frac{3}{4}$

(8) $3.5+(-3.5)=0$

(9) $\frac{7}{9}\times\frac{4}{5}=\frac{28}{45}=\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}$

(10) $\frac{8}{9}\times\frac{11}{13}=\frac{11}{13}\times\frac{8}{9}$

(11) $4\times(8\times16)=(4\times8)\times16$

(12) $6\times\frac{1}{6}=1$

(13) $4\times(5+6)=4\times5+4\times6$

(14) $\frac{2}{7}\times(\frac{3}{5}+\frac{1}{9})=\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{9}$

(15) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع اور خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب کو کسی مثال کے ذریعے سمجھائیے۔

(16) کیا ہر صحیح عدد کو ناطق عدد کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے؟

(17) جمع کے لحاظ سے ذیل کے اعداد کے معکوس لکھیں:

$$\frac{3}{4},\ \frac{15}{7},\ \frac{0}{5}$$

(18) ضرب کے لحاظ سے مندرجہ ذیل ناطق اعداد کے معکوس لکھیں:

$$\frac{5}{3},\ \frac{4}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{3}$$

مندرجہ ذیل کسور کو عام کسور اعشاریہ میں تبدیل کرتے ہیں :

$\frac{1}{4} = 1 \div 4$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 1.00 \quad 0.25 \\ \hline & \underline{8} \\ & 20 \\ & \underline{20} \\ & 0 \end{array}$$

$\frac{1}{4} = 0.25$

$\frac{3}{8} = 3 \div 8$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3.000 \quad 0.375 \\ \hline & \underline{24} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & 0 \end{array}$$

یعنی $\frac{3}{8} = 0.375$

پس دونوں میں تقسیم کا عمل بالترتیب دو اور تین درجے اعشاریہ کے بعد ختم ہو جاتا ہے۔ اس قسم کی کسور کو ہم اختتامی کسور کہتے ہیں۔ اسی طرح اب ہم $\frac{1}{3}$ کو کسر اعشاریہ میں تبدیل کرتے ہیں۔

$\frac{1}{3} = 1 \div 3$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1.00 \quad 0.333 \\ \hline & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 1 \end{array}$$

اس تقسیم کے عمل میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر مرتبہ 1 باقی بچ جاتا ہے اور حاصل تقسیم ہر مرتبہ 3 ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ نہ ختم ہونے والا ہے۔ پس کسر عام $\frac{1}{3}$ کو جب ہم کسر اعشاریہ میں تبدیل کرنے کوشش کرتے ہیں تو ایک دلچسپ صورتحال پیش آتی ہے، یعنی اس میں اعشاریہ کے درجے کبھی ختم نہیں ہوتے اور بار بار ایک ہی عدد آتا ہے۔ ایسی اعشاریہ کو ہم متوالی اعشاریہ (Recurring Decimal) کہتے ہیں۔

یعنی $\frac{1}{3} = 0.333 \ldots\ldots\ldots$

یا $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

یہاں ہندسہ 3 کے اوپر جو افقی خط کھینچا گیا ہے وہ اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ہندسہ 3 بار بار آ رہا ہے۔ اعشاریہ کے بعد جو ہندسہ بار بار آ رہا ہے، اس کو ظاہر کرنے کے لیے اس پر ایک افقی خط کھینچ دیتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل کسور عام کو کسور متوالی اعشاریہ کی صورت میں تبدیل کیجیے:

(i) $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{4}{7}$ (iii) $\frac{9}{11}$

حل:

(i) $\frac{2}{9} = 2 \div 9$

$$9 \overline{)2.000} \; 0.222$$

18
20
18
2

(i) $\frac{2}{9} = 0.222 \ldots\ldots$

یا $\frac{2}{9} = \overline{0.2}$

(ii) $\frac{4}{7} = 4 \div 7$

$$7 \overline{)4.000} \; 0.5714285$$

35
50
49
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
5

$\frac{4}{7} = 0.571428\ldots\ldots$

یا $\frac{4}{7} = \overline{0.571428}$

(iii) $\frac{9}{11} = 9 \div 11$

$$11 \overline{)9.000} \; 0.8181$$

88
20
11
90
88
20
11
9

یعنی

$\frac{9}{11} = 0.8181 \ldots\ldots$

یا $\frac{9}{11} = \overline{0.81}$

مثال 2: کسر عام $\frac{7}{12}$ کو کسر متوالی اعشاریہ میں لکھیں۔

حل:

$$\frac{7}{12} = 7 \div 12$$

$$
\begin{array}{r|l}
12 \overline{)7.000} & 0.5833 \\
\underline{60} & \\
100 & \\
\underline{96} & \\
40 & \\
\underline{36} & \\
40 & \\
\underline{36} & \\
4 &
\end{array}
$$

یعنی

$$\frac{7}{12} = 0.5833 \ldots\ldots$$

یا $\frac{7}{12} = \overline{0.583}$

مشق نمبر 3.3

(1) مندرجہ ذیل کسور عام کو کسور متوالی اعشاریہ کی صورت میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$ (v) $\frac{4}{15}$

(vi) $\frac{17}{18}$ (vii) $\frac{5}{22}$ (viii) $\frac{13}{24}$ (ix) $\frac{13}{27}$ (x) $\frac{29}{33}$

(2) مندرجہ ذیل کسور عام کو اعشاریہ کی صورت میں تبدیل کیجئے اور ہر ایک کے متعلق یہ بتایئے کہ یہ اختتامی کسر ہے یا متوالی کسر:

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{7}{3}$ (iv) $\frac{2}{7}$ (v) $\frac{5}{8}$ (vi) $\frac{7}{9}$ (vii) $\frac{3}{11}$

(viii) $\frac{4}{15}$ (ix) $\frac{13}{18}$ (x) $\frac{22}{25}$ (xi) $\frac{61}{90}$ (xii) $\frac{59}{99}$ (xiii) $\frac{61}{90}$ (xiv) $\frac{13}{20}$

باب نمبر 4 جذرالمربع

ذیل میں دیئے گئے اعداد کی تجزیوں پر غور کریں۔

$$4 = 2 \times 2,\ \ 9 = 3 \times 3,\ \ 16 = 4 \times 4$$

ان تجزیوں میں عدد کے دو جزو ضربی ہیں اور یہ دونوں جزو ایک ہی عدد ہیں : مثلاً عدد "2" کو "2" سے ضرب دینے سے "4" حاصل ہو تا ہے۔ "3" کو "3" سے ضرب دینے سے "9" آتا ہے اور اسی طرح "4" کو "4" سے ضرب دیں تو "16" حاصل ہو تا ہے۔ پس یہاں "2" جذرالمربع یا جذر کہلاتا ہے 4 کا ، اسی طرح "3" جذر المربع یا جذر کہلاتا ہے 9 کا ، ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ :

4 کا جذر 2 ہے

9 کا جذر 3 ہے

اور 16 کا جذر 4 ہے۔

اسی طرح 25 کا جذر 5 ہے

اور 36 کا جذر 6 ہے

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ

$$4 = (-2)\times(-2)$$

$$9 = (-3)\times(-3)$$

اوپر دیئے ہوئے اصول کے مطابق "4" کا جذر "2-" بھی ہے اور اسی طرح "9" کا جذر "3-" بھی ہے۔

بالمعلوم ہر عدد کا جذر دو اعداد پر مشتمل ہو تا ہے۔

ان میں ایک عدد مثبت اور دوسرا منفی ہو تا ہے لیکن مربع ہمیشہ مثبت ہو تا ہے۔

جذر کی علامت $\sqrt{\ }$ عام طور پر مثبت جذر کو ظاہر کرتی ہے۔

$\sqrt{49} = 7$ اور $\sqrt{36} = 6$

جذر المربع معلوم کرنا

جذر معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل طریقے استعمال کرتے ہیں :

(i) جذر بذریعہ تجزی۔

(ii) جذر بذریعہ تقسیم۔

آپ پانچوں اور چھٹی جماعت میں مفرد تجزی بنانا سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم عدد کی مفرد تجزی بنا کر جذر معلوم کرنا سیکھیں گے۔

مثال 1: 256 کا جذر معلوم کیجئے۔

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2

حل: پہلے 256 کی مفرد تجزی معلوم کرتے ہیں۔

اب ایک جیسے دو دو اجزائے ضربی کے گروپ بناتے ہیں

$$256 = (2x2) \times (2x2) \times (2x2) \times (2x2)$$

ہر ایک گروپ میں سے صرف ایک جز لیتے ہیں۔

$$\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

پڑتال: $16x16 = 256$

مثال 2: 3969 کا جذر معلوم کیجئے:

حل: 3969 کے مفرد تجزی معلوم کرتے ہیں۔

$$3969 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$$

2	3969
2	1323
2	441
2	147
2	49
2	7

ایک جیسے دو دو اجزائے ضربی کے گروپ بناتے ہیں۔

$$3969 = (3x3) \times (3x3) \times (7x7)$$

ہر گروپ میں سے ایک جزو لیا۔

$$\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7$$

$$= 63$$

پڑتال $63 \times 63 = 3969$

مثال 3: ایک استاد نے بچوں کو مربع شکل میں بٹھایا۔ اگر بچوں کی کل تعداد 81 ہو بتائیں کہ ہر قطار میں کتنے بچے ہوں گے۔

حل: چونکہ استاد نے بچوں کو مربع شکل میں بٹھایا ہے اس لیئے ہر وکار میں بچوں کی تعداد برابر ہو گی۔ اس لئے 81 کے جذر کے ذریعے ہر قطار میں بچوں کی تعداد معلوم کی جا سکتی ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ $81 = 9 \times 9$

پس $\sqrt{81} = 9$

پس ہر قطار میں 9 بچے ہوں گے

مثال 4: ایک مربع شکل کے کھیت کا رقبہ 625 مربع میٹر ہے۔ اس کھیت کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں

حل:

5	625
5	125
5	25
5	5

پس $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$625 = (5 \times 5) \times (5 \times 5)$

$\sqrt{625} = 5 \times 5$

$\sqrt{625} = 25$

پس کھیت کے ضلع کی لمبائی 25 میٹر ہے

مشق نمبر 4.1

جذر المربع بذریعہ مفرد تجزی معلوم کریں:

(1) 676　(2) 1089　(3) 4900
(4) 169　(5) 484　(6) 1024
(7) 576　(8) 625　(9) 900
(10) 441　(11) 1681　(12) 1600
(13) 2025　(14) 4900　(15) 3844
(16) 4096　(17) 3600　(18) 7056
(19) 72900　(20) 8100

(21) سیف اللہ نے 144 موتیوں کی مدد سے ایک مربع شکل بنائی۔ بتایئے کہ اس نے مربع کے ایک ضلع پر کتنے موتی رکھے۔

(22) زرولی اور بدرالدین ہم عمر ہیں دونوں کی عمروں کا حاصل ضرب 196 ہے بتایئے کہ ہر ایک کی عمر کتنی ہے۔

کسور عام کا جذر المربع معلوم کرنا

آپ اعداد کا مفرد تجزی کے ذریعے جذر المربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آیئے ! اب ہم کسور کا جذر المربع معلوم کرنا سیکھتے ہیں۔

کسور عام کا جذر المربع معلوم کرنا

کسور عام کا جذر المربع معلوم کرنے کے لئے ہم اس کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کا جذر معلوم کرتے ہیں۔ کسر کا جذر المربع معلوم کرنے کے لئے درج ذیل کلیہ یاد رکھیئے۔

کسر کا جذر المربع = (کسر کے شمار کنندہ کا جذر المربع) / (کسر کے نسب نما کا جذر المربع)

اگر $\frac{p}{q}$ ایک کسر ہو جہاں $q \neq o$ ہو تو $\sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$

مخلوط کسر کی صورت میں پہلے کسر کو غیر واجب کسر میں تبدیل کرتے ہیں۔

مثال1: $\frac{64}{81}$ کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

حل: شمار کنندہ اور نسب نما کا الگ الگ جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔

$8 = 64$ کا جذر المربع $= \sqrt{64}$

$9 = 81$ کا جذر المربع $= \sqrt{81}$

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

مثال 2: $2\frac{113}{256}$ کا جذر المربع معلوم کریں۔

حل: $2\frac{113}{256} = \frac{625}{256}$

پہلے ہم شمار کنندہ کا جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔

5	625
5	125
5	25
	5

پس $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$625 = 5\ (5 \times 5) \times (5 \times 5)$

$\sqrt{625} = 5 \times 5$

$= 25$

اب ہم نسب نما کا جذر المربع معلوم کرتے ہیں

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	1

پس $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$256 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$\sqrt{256} = 16$

اس لئے $\sqrt{2\frac{113}{256}} = \sqrt{\frac{625}{256}} = \frac{25}{16}$

مشق نمبر 4.2

مندرجہ ذیل کسور عام کا جذر المربع معلوم کریں :

(i) $\frac{144}{225}$ (ii) $\frac{324}{441}$ (iii) $\frac{1225}{9801}$ (iv) $1\frac{25}{144}$ (v) $1\frac{48}{121}$

جذر کے متعلق مزید عبارتی سوالات

مثال 1: ایک مربع باغ کا رقبہ 169 مربع میٹر ہے۔ باغ کے ایک ضلع کی پیمائش کیا ہے ؟

حل: چونکہ باغ مربع شکل کا ہے ، لہذا باغ کے ضلعوں کی لمبائی اور چوڑائی پیمائش میں برابر ہو گی اور ایک ضلع کی پیمائش رقبے کے جذر المربع کے برابر ہو گی۔

ایک ضلعے کی پیمائش = $\sqrt{\text{مربع باغ کا رقبہ}}$ = $\sqrt{169}$

مثال 2: ایک لڑکی نے اپنے دوپٹے پر 1024 پھول اس طرح کاڑھے کہ جتنی قطاریں تھیں ، ہر قطار میں اتنے ہی پھول تھے۔ ہر قطار میں پھولوں کی تعداد بتائیں۔

حل: ایک قطار میں پھولوں کی تعداد × قطاروں کی تعداد = کل پھولوں کی تعداد

اور ایک قطار میں پھولوں کی تعداد = قطاروں کی تعداد

اس لیے ایک قطار میں پھولوں کی تعداد کل تعداد کا جذر ہو گی

قطار میں پھولوں کی تعداد = $\sqrt{1024} = 32$

مشق نمبر 4.3

(1) ایک مربعی علاقے کا رقبہ 12100 مربع میٹر ہے۔ اس کے ضلعے کی مقدار معلوم کریں۔

(2) فوج کے ایک افسر نے 1936 سپاہیوں کو قطاروں میں اس طرح کھڑا کیا کہ ہر قطار میں اتنے ہی سپاہی تھے، جتنی قطاریں تھیں۔ بتائیے ہر قطار میں کتنے سپاہی کھڑے ہوئے ؟

(3) ایک باغ میں مالٹوں کے 5929 درخت سیدھی قطاروں میں لگے ہوئے ہیں۔ اگر ہر قطار میں اتنے ہی درخت ہوں جتنی قطاریں ہیں تو ہر قطار میں درختوں کی تعداد بتائیں۔

(4) ایک مربعی علاقے میں باغ لگایا گیا۔ علاقے کا رقبہ 44100 مربع میٹر ہے۔ بتائیے کہ باغ کے گرد ایک چکر لگانے کے لئے کتنا فاصلہ طے کرنا پڑے گا؟

(5) کاروں کے ایک کارخانے میں 6560 کاروں کو اس طرح کھڑا کیا گیا کہ قطاروں کی تعداد ایک قطار میں کاروں کی تعداد کے برابر تھی لیکن ایک جگہ خالی رہ گئی بتایئے کاروں کی کل کتنی قطاریں ہیں؟

کسورِ اعشاریہ کا جذر معلوم کرنا

کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کرنے کے لیے یہاں ہم صرف ایک طریقے کا ذکر کریں گے۔ کسر اعشاریہ کا جذر نکالنے کے لیے پہلے کسر اعشاریہ کو کسر عام میں تبدیل کیا جاتا ہے اور پھر کسور عام کے طریقے سے جذر معلوم کیا جاتا ہے اور جواب کو دوبارہ کسر اعشاریہ میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

مثال 1: 1.44 کا جذر معلوم کریں۔

$$\sqrt{1.44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 2 \times 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^2 \times 2^2 \times 2^2}{5^2 \times 2^2}}$$

$$= \frac{3 \times 2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

پس 1.44 کا جذر 1.2 ہے۔

مثال 2: 0.81 کا جذر معلوم کریں۔

حل: $$\sqrt{0.81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{81}{100}}$$

3	81
3	27
3	9
	3

2	100
2	50
5	25
	5

پس

$$\sqrt{0.81} = \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^2 \times 3^2}{2^2 \times 5^2}}$$

$$= \frac{3 \times 3}{2 \times 5}$$

$$= \frac{9}{10} = 0.9$$

مشق نمبر 4.4

مندرجہ ذیل کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کریں:

(1) 3.24 (2) 4.41 (3) 5.29

(4) 7.29 (5) 6.25 (6) 37.21

(7) 7.84 (8) 10.24 (9) 30.25

(10) 100.00 (11) 8.41 (12) 9.61

(13) 33.64 (14) 31.36 (15) 34.81

(16) ایک مسجد میں 1024 نمازی اس طرح کھڑے ہیں کہ ایک قطار میں جتنے نمازی ہیں قطاریں بھی اتنی ہی ہیں۔ ہر قطار میں نمازیوں کی تعداد بتائیں۔

(17) ایک باغ میں 1296 درخت مربع کی شکل میں لگے ہوئے ہیں۔ بتایئے کل کتنی قطاریں ہیں اور ہر قطار میں کتنے درخت ہیں؟

(18) ایک مربع فرش کا رقبہ 900 مربع میٹر ہے۔ فرش کا احاطہ معلوم کریں۔

(19) ایک سکول میں 56.25 روپے چندہ اس طرح اکٹھا ہوا کہ ہر طالب علم نے اتنے ہی پیسے چندہ دیا جتنا کہ طلباء کی تعداد ہے۔ بتایئے طلباء کی تعداد کتنی ہے؟

باب نمبر 5 فیصد

زندگی کے معمولات میں فیصد کا اطلاق

روزمرہ لین دین اور کاروبار میں فیصد کا طریقہ عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ نفع یا نقصان کو عموماً فیصد کے حساب سے شمار کیا جاتا ہے۔ ہر قسم کی چھوٹ، سیلز مین کا کمیشن، زکواۃ، انشورنس، ٹیکس کی ادائیگی فیصد کے حساب سے مقرر کی جاتی ہے۔ آیئے !اب ہم فیصد کا استعمال مختلف صورتوں میں سیکھتے ہیں۔

نفع اور نقصان

آپ کو معلوم ہے کہ کاروبار میں چیزیں خریدی اور بیچی جاتی ہیں۔ ہر کاروبار نفع حاصل کرنے کے لئے کرتے ہیں لیکن بعض اوقات نقصان بھی ہو جاتا ہے۔

تاجر یا کاروباری لوگ اپنا مال خریدتے یا بنواتے ہیں۔ اس طرح سے مال کی قیمت خرید مقرر ہوتی ہے۔ اگر مال کی قیمت فروخت قیمت خرید سے زیادہ ہو تو تاجر کو نفع ہوتا ہے۔ اگر کسی وجہ سے قیمت فروخت قیمت خرید سے کم ہو تو کاروبار میں تاجر نقصان اٹھاتا ہے۔ پس

نقصان = قیمت خرید − قیمت فروخت

نفع = قیمت فروخت − قیمت خرید

مثال 1

اختر نے ایک جوتا 480 روپے میں خریدا اور 500 روپے میں بیچ دیا۔ نفع یا نقصان معلوم کریں۔

حل۔ قیمت خرید = 480 روپے

قیمت فروخت = 500 روپے

چونکہ قیمت فروخت، قیمت خرید سے زیادہ ہے، اس لئے نفع ہوگا

نفع = قیمت فروخت − قیمت خرید

= 500 − 480

نفع = 20 روپے

مثال 2:

ایک کتاب کی قیمت 375 روپے ہے۔ 30 روپے مزید اس پر جلد بنوانے کے لئے خرچ کئے گئے اور 380 روپے میں کتاب فروخت ہوئی۔ نفع یا نقصان معلوم کیجئے۔

حل:

کتاب کی قیمت خرید	=	375 روپے
جلد بنوائی	=	30 روپے
کتاب کی کل قیمت خرید	=	375 + 30 = 405 روپے
کتاب کی قیمت فروخت	=	380 روپے

چونکہ قیمت فروخت قیمت خرید سے کم ہے، اس لئے نقصان ہوا۔

نقصان = قیمت خرید - قیمت فروخت

= 405 - 380

= 25 روپے

نفع یا نقصان فیصد

کاروباری حضرات عموماً یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ انہیں کس کاروبار میں کس شرح سے منافع یا نقصان ہو گیا ہوا۔ اس کے لئے وہ قیمتوں کا مقابلہ فیصد میں کرتے ہیں، مثلاً اگر ایک دکاندار کوئی چیز 50 روپے کی خرید کر 60 روپے میں بیچتا ہے اور دوسری چیز 100 روپے کی خرید کر 110 روپے میں بیچتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دکاندار کو دونوں بار 10 روپے منافع ہوا۔ ہم سوچیں گے کہ دونوں بار ایک ہی منافع ہوا لیکن صورتحال یہ نہیں ہے۔

پہلی چیز بیچنے کا فیصد منافع $= \frac{10}{50} \times 100 = 20\%$

دوسری چیز بیچنے کا فیصد منافع $= \frac{10}{100} \times 100 = 10\%$

شرح منافع برابر نہیں ہے۔

پس فیصد نفع معلوم کرنے سے زیادہ منافع بخش کاروبار کا تعین کیا جاسکتا ہے۔

مثال3: پہلا طریقہ

ایک ہینڈ بیگ 280 روپے میں خریدا اور 350 روپے میں بیچا گیا۔ نفع فیصد معلوم کیجیے۔

حل: قیمت خرید -- قیمت فروخت = نفع

= 350 – 280

= 70 روپے

قیمت خرید : نفع

280 : 70

100 : x

$x \times 280 = 70 \times 100$

$x = 70 \times \frac{100}{280}$

$x = 25\ \%$

پس 25 فیصد نفع ہوا

دوسرا طریقہ (اکائی کا قاعدہ)

حل: 280 روپے خرید پر نفع ہوا = 70 روپے

1 روپے خرید پر نفع ہوا = $\frac{70}{280}$ روپے

100 روپے خرید پر نفع ہوا = 70×100

فیصد نفع = $\frac{70}{280} \times 100\%$

= 25%

پس 25 فیصد نفع ہوا

مثال 4: اگر ایک پھل فروش 100 کینو کا کریٹ 90 روپے میں خریدے اور 1.50 روپے فی کینو کے حساب سے فروخت کرے تو اس کا نفع فیصد بتائیں۔

حل: ایک کینو کی قیمت = 1.50 روپے

100 کینو کی قیمت فروخت = 1.50×100 = 150 روپے

نفع = قیمت فروخت - قیمت خرید

= 150 - 90 = 60 روپے

نفع % $= \frac{60}{90} \times 100\,\%$

$= \frac{200}{3}\,\%$

$= 66\frac{2}{3}\,\%$

اسے نسبت کے طریقے سے بھی حل کیا جاسکتا ہے

یاد رکھیں

چیز بیچنے کی فیصد منافع = $\frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

چیز بیچنے کی فیصد نقصان = $\frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$

مشق نمبر 5.1

① 30 روپے کا قلم خرید کر 36 روپے میں بیچنے سے کتنے فیصد نفع ہوا؟

② ایک سلائی کی مشین 1800 روپے میں خریدی اور 1600 روپے میں فروخت کر دی۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

③ ایک دکاندار نے 1000 روپے کی نصف کوئنٹل دال خرید کر 22.50 روپے فی کلوگرام کے حساب سے بیچ دی۔ اس کا نفع یا نقصان فیصد بتایئے۔

④ ایک پھل فروش نے کچھ کیلے 120 روپے فی سینکڑا کے حساب سے خرید کر 18 روپے فی درجن کے حساب سے بیچ دیئے۔ اس کا نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجئے۔

⑤ کپڑے کے ایک بیوپاری نے 50 میٹر لٹھا 3000 روپے میں خریدا اور اسے 65 روپے فی میٹر کے حساب سے بیچ دیا۔ بتائیں کہ بیوپاری کو کتنے فیصد نفع یا نقصان ہوا؟

قیمت فروخت معلوم کرنا جب کہ نفع یا نقصان فی عدد دیا گیا ہو

اگر ہمیں کسی چیز کی قیمت خرید نفع یا نقصان فیصد دیا گیا ہو تو ہم قیمت فروخت معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے لیے ہم قیمت خرید 100 روپے فرض کر لیتے ہیں نفع اور نقصان کو بالترتیب 100 میں جمع اور تفریق کرتے ہیں پھر اکائی کے قاعدے سے قیمت فروخت معلوم کرتے ہیں, اسے نسبت تناسب کے طریقے سے بھی معلوم کیا جاتا ہے۔

مثال 1: ایک ٹیلی ویژن سیٹ 18000 روپے میں خرید ا گیا اور 9% نفع سے بیچا گیا۔ ٹیلی ویژن سیٹ کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

پہلا طریقہ

حل: سیٹ کی قیمت خرید = 18000 روپے

نفع = 9%

قیمت خرید : قیمت فروخت

$$100 : 18000 :: a : 109$$

طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

$$109 \times 18000 = 100 \times a$$

$$a = \frac{109 \times 18000}{100}$$

= 19620 روپے

پس ٹیلی ویژن سیٹ 19620 روپے میں فروخت ہوا۔

دوسرا طریقہ (اکائی کا قاعدہ)

حل:

فرض کیا قیمت خرید = 100 روپے

منافع = 9%

اس لیے (ایک سو) 100 روپے پر قیمت فروخت = 100 + 9 = 109 روپے

100 روپے خرید پر قیمت فروخت = 109 روپے

1 روپے خرید پر قیمت فروخت = $\frac{109}{100}$

1800 روپے خرید پر قیمت فروخت = $\frac{109}{100} \times 18000$

= 19620 روپے

پس ٹیلی ویژن 19620 روپے میں فروخت ہوا۔

مثال 2:

ایک لیمپ 800 روپے میں خرید کر 5% نقصان پر بیچا گیا۔ قیمت فروخت معلوم کریں۔

حل: لیمپ کی قیمت خرید = 800 روپے

نقصان = 5%

قیمت خرید : قیمت فروخت

100 : 800 :: 95 : a

طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

$95 \times 800 = 100 \times a$

$a = \frac{95 \times 800}{100}$

= 760 روپے

پس لیمپ کی قیمت فروخت 760 روپے ہے۔

قیمت خرید معلوم کرنا، جبکہ نفع یا نقصان فیصد دیا گیا ہو

اب ہم قیمت خرید معلوم کرنا سیکھیں گے۔ اس کا طریقہ بھی ویسا ہی ہو گا جیسے ہم نے قیمت فروخت معلوم کرنے کے لیے سیکھا تھا۔

درج ذیل مثالوں سے ہم قیمت خرید معلوم کرتے ہیں۔

مثال 1:

ایک دکاندار نے ایک کتاب 650 روپے میں بیچ کر 30 فیصد نفع حاصل کیا۔ کتاب کی قیمت خرید بتائیے۔

حل: فرض کیجیے قیمت خرید 100 روپے ہے۔

فرض کیا قیمت فروخت = قیمت خرید + نفع

$= 100 + 30 = 130$

قیمت فروخت = قیمت خرید

$130 = 100$

$a = 650$

$a \times 130 = 650 \times 100$

$a = \frac{100 \times 650}{130}$

= 500 روپے

پس کتاب کی قیمت خرید 500 روپے ہے۔

مثال 2: ایک سنار 6160 روپے کی انگوٹھی فروخت کرتا ہے جس پر اسے 12 فیصد نقصان ہوتا ہے۔ انگوٹھی کی قیمت خرید معلوم کریں۔

حل:

فرض کیا انگوٹھی کی قیمت خرید = 100 روپے

نقصان = 12 % روپے

قیمت فروخت = 100 - 12 = 88 روپے

قیمت خرید = قیمت فروخت

$$88 : 6160 :: 100 : a$$

وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب

$$88 \times a = 6160 \times 100$$

$$a = \frac{6160 \times 100}{88}$$

$$a = 7000$$ روپے

پس انگوٹھی کی قیمت خرید 7000روپے ہے۔

مشق نمبر 5.2

① حمید نے ایک استری 900 روپے میں خریدی اور 20 فیصد نفع پر فروخت کر دی۔ قیمت فروخت بتائیں۔

② 15 کلوگرام آم 20 روپے فی کلوگرام کے حساب سے خریدے گئے اور 30 فیصد نفع پر فروخت کر دیئے گئے۔ آموں کی قیمت فروخت فی کلوگرام کے حساب سے معلوم کیجیے۔

③ ایک صوفہ سیٹ 8000 روپے میں خرید اگیا اور 30 فیصد نفع پر بیچ دیا گیا۔ قیمت فروخت معلوم کریں۔

④ ایک جوتا 750 روپے میں خرید کر 10% نقصان پر بیچ دیا گیا ہے۔ قیمت فروخت بتائیں۔

⑤ ایک گھڑی 1900 روپے میں خریدی گئی۔ اگر اس پر 20 فیصد نفع کمانا مقصود ہو تو قیمت فروخت بتائیں۔

⑥ اگر میں اپنی سائیکل 6% نقصان پر فروخت کروں تو قیمت فروخت 3290 روپے ہو گی۔ قیمت خرید بتائیں۔

⑦ $33\frac{1}{33}$ فیصد نفع کمانے کے لئے میں نے ایک دوپٹہ 240 روپے میں فروخت کیا۔ دوپٹہ کی قیمت خرید کیا تھی؟

⑧ ادریس نے ایک کیمرہ 3450 روپے میں بیچا۔ اسے 15 فیصد نفع ہوا۔ قیمت خرید معلوم کریں۔

⑨ ایک لیمپ کو 480 روپے میں فروخت کرنے سے 10 فیصد نقصان ہوا۔ بتائیے کہ لیمپ کو کتنی قیمت پر فروخت کیا جائے کہ 10 فیصد نفع ہو؟

⑩ ایک ہار کو 6923 روپے میں بیچنے سے 14% نقصان ہوا۔ اسے کتنے روپوں میں بیچا جائے کہ نہ نفع ہو نہ نقصان؟

باب نمبر 6 نسبت تناسب

تمہید و اعادہ

ہم چھٹی جماعت میں نسبت اور تناسب کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ہمیں معلوم ہے کہ ہم ایک قسم کی چیزوں کی مقداروں کا مقابلہ دو طرح سے کرتے ہیں' مثلاً دو گھڑیوں کی قیمت میں 150 روپے کا فرق ہے۔ دوسری قسم کا مقابلہ بذریعہ تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک گھڑی کی قیمت دوسری سے دگنی ہے۔ یہاں ہم دو گھڑیوں کی قیمت کا مقابلہ بذریعہ تقسیم ایک کسر کی صورت میں کر رہے ہیں۔ بذریعہ تقسیم مقابلے کو نسبت قائم کرنا کہتے ہیں۔

نسبت دو ہم نوع چیزوں کی مقداروں کے تعلق کو ظاہر کرتی ہے اور بتاتی ہے کہ ایک چیز کی مقدار دوسری مقدار کا کتنے گنا ہے یا اس کا کون سا حصہ ہے۔

نسبت ظاہر کرنے کے لئے علامت " : " استعمال کی جاتی ہے۔ نسبت کے دو ارکان ہوتے ہیں۔ 4:9 میں پہلا رکن 4 ہے اور دوسرا رکن 9 ہے۔ نسبت کے ارکان کی ترتیب اہم ہے۔ 4:9 اور 9:4 دو مختلف نسبتیں ہیں۔ اگر نسبت کے دونوں ارکان کو ایک ہی عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو نسبت میں فرق نہیں پڑتا۔ مثلاً 4:6 یا 8:12 اور 2:3 ایک ہی نسبت کی مختلف صورتیں ہیں۔

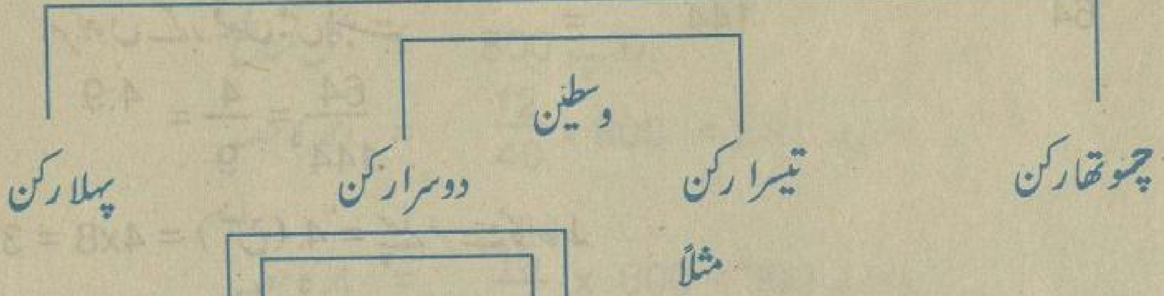
ایک جیسی دو نسبتوں کے برابر ہونے کو تناسب کہتے ہیں۔ تناسب ظاہر کرنے کے لئے علامت " :: " یا "=" استعمال کی جاتی ہے۔

2:3 = 4:6

2:3 :: 4:6

تناسب کی چار مقداروں کو تناسب کے ارکان کہتے ہیں۔

تناسب کے متعلق جو اہم بات ہم نے سیکھی تھی' وہ یہ ہے کہ تناسب کا پہلا اور چوتھا رکن طرفین اور دوسرا اور تیسرا رکن وسطین کہلاتا ہے۔ طرفین کا حاصل ضرب وسطین کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔



مثلاً

2:3 :: 4:6

2x6 = 3x4

12 = 12

مثلاً

2 : 3 :: 4 : 6

2 x 6 = 3 x 4

12 = 12

نسبت تناسب

مثال 1: ایک ہائی سکول میں 630 بچے مقامی ہیں اور 120 بچے قریب کے دیہات سے آتے ہیں۔ باہر سے آنے والے بچوں کی مقامی بچوں سے نسبت معلوم کریں۔

حل: نسبت کو مختصر کرتے ہیں۔

	مقامی بچے	:	دیہی بچے
	630	:	120
2 پر تقسیم کرنے سے	315	:	60
3 پر تقسیم کرنے سے	105	:	20
5 پر تقسیم کرنے سے	21	:	4

پس دیہی بچوں اور مقامی بچوں میں نسبت 4:21 ہے۔

مثال 2:

اگر 2 مربعوں کے ضلع 8 سم اور 12 سم ہوں تو ان کے رقبوں کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔

حل: پہلے مربع کا رقبہ = $(\text{ضلع})^2$ = $8^2 = 64$ مربع سم

دوسرے مربع کا رقبہ = $(\text{ضلع})^2$ = $12^2 = 144$ مربع سم

		دوسرا مربع	:	پہلا مربع
مربعوں کے رقبوں میں نسبت	=	144	:	64

$$\frac{64}{144} = \frac{4}{9} = 4:9$$

پہلے مربع کا احاطہ = 4 (ضلع) = 4x8 = 32

دوسرے مربع کا احاطہ = 4(ضلع) = 4x12 = 48

مربعوں کے احاطوں میں نسبت = دوسرا مربع : پہلا مربع

$$32 : 48 = \frac{32}{48} = \frac{2}{3} = 2:3$$

پس مربعوں کے رقبوں میں 4:9 اور احاطوں میں 2:3 کی نسبت ہے۔

مثال 3: تار کے دو ٹکڑوں کے درمیان 4:7 کی نسبت ہے۔ اگر تار کا لمبا ٹکڑا 3.5 میٹر ہو تو چھوٹے ٹکڑے کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: فرض کیجیے کہ چھوٹے تار کے ٹکڑے کی لمبائی a میٹر ہے۔

	بڑا ٹکڑا	:	چھوٹا ٹکڑا	=	بڑا رکن	: چھوٹا رکن
پس	3.5	:	a	=	7	: 4

طرفین کا حاصل ضرب = طرفین کے حاصل ضرب

$$7 \times a = 4 \times 3.5$$

$$\frac{7 \times a}{7} = \frac{4 \times 3.5}{7}$$

$$a = 2$$

پس چھوٹے تار کی لمبائی 2 میٹر ہے۔

مثال 4: احمد، بابر اور چراغ دین نے مل کر ایک کاروبار شروع کیا اور انھوں نے بالترتیب 2400، 3000 اور 2600 روپے لگائے۔ اگر انہیں منافع 800 روپے ہو تو ہر ایک کا حصہ معلوم کیجیے۔

حل: چراغ دین کا سرمایہ : بابر کا سرمایہ : احمد کا سرمایہ

لگائے گئے سرمائے میں نسبت = 2400 : 3000 : 2600

= 12 : 15 : 13

نسبتوں کا مجموعہ $12 + 15 + 13 = 40$

کل منافع = 800 روپے

احمد کا حصہ = $\frac{12}{40} \times 800 = 240$ روپے

بابر کا حصہ = $\frac{15}{40} \times 800 = 300$ روپے

چراغ دین کا حصہ = $\frac{13}{40} \times 800 = 260$ روپے

پس احمد کو 240 روپے، بابر کو 300 روپے اور چراغ دین کو 260 روپے ملے۔

مشق نمبر 6.1

1. مندرجہ ذیل نسبتوں کو مختصر کریں:

(i) 44 : 8　(ii) 3.6 : 4.5

(iii) 0.5 : 2　(iv) $2\frac{2}{7} : 2\frac{2}{3}$

2. اگر عابدہ نے 100 نمبروں کے پرچے میں 60 نمبر حاصل کئے تو اس کے 75 نمبروں میں سے کتنے نمبر ہوں گے؟

3. اگر ایک آدمی ایک ماہ میں 3600 روپے کماتا ہے اور 3000 روپے خرچ کرتا ہے تو (i) اس کی آمدنی اور خرچ کی نسبت معلوم کیجئے۔ (ii) اس کی بچت اور آمدنی کی نسبت معلوم کیجئے۔

4. احمد اور سعید $2\frac{1}{2}$ کلو چینی 1:4 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ بتایئے کہ دونوں کو کتنی کتنی چینی ملے گی؟

5. ایک مستطیل کے اضلاع میں 2:5 ہے۔ اگر مستطیل کی چوڑائی 5 سم ہو تو مستطیل کا رقبہ بتایئے۔

6. ایک دھات کے $\frac{5}{9}$ حصے کا وزن 7 کلوگرام ہے۔ بتایئے کہ $\frac{2}{7}$ حصے کا وزن کتنا ہوگا؟

⑦ دو اعداد کے درمیان 4 اور 5 کی نسبت ہے۔ اگر دوسرا عدد 25 ہو تو پہلا عدد معلوم کیجئے۔

⑧ ایک نقشے میں 4 سم 50 کلومیٹر کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر دو شہروں کے درمیان فاصلہ 20 سم ہو تو ان کے درمیان اصل فاصلہ کتنا ہے؟

⑨ پہلا تناسب معلوم کریں، جبکہ دوسرا، تیسرا اور چوتھا تناسب بالترتیب $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{15}$ اور $\frac{11}{24}$ ہو

⑩ ریڈیو کے ایک گھنٹے کے پروگرام میں 13 منٹ اعلانات اور اشتہاروں کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ سکندر کا کہنا ہے کہ اعلانات اور اشتہاروں اور اصل پروگرام میں 1:5 کی نسبت ہے۔ کیا یہ صحیح ہے؟

مسلسل نسبت اور حصوں میں تناسب (Continued Ratios and Proportional Parts)

دو سے زیادہ نسبتوں کا مقابلہ کرنے کے لیے مسلسل نسبتوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ جس طرح نسبت کے سوالات میں نسبت کی ترتیب لازمی ہوتی ہے، اسی طرح مسلسل نسبت میں بھی نسبتوں کی ترتیب کا خاص خیال رکھتے ہیں۔ مسلسل نسبت کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کریں گے:

مثال 1: نور اور ضیاء کو 2 اور 3 کی نسبت سے عیدی ملی، جبکہ ضیاء اور کرن کو 5 اور 4 کی نسبت سے عیدی ملی۔ ان تینوں کی عیدی کی مسلسل نسبت معلوم کیجئے۔

حل: نور اور ضیاء کی عیدی میں نسبت = 2:3

ضیاء اور کرن کی عیدی میں نسبت = 5:4

اس نسبت میں ضیاء کا حصہ 3 اور دوسری میں 5 ہے۔ دونوں نسبتوں میں ضیاء کے حصے کو ایک جیسا کرنے کے لئے پہلی نسبت کو 5 سے ضرب دیتے ہیں اور دوسری نسبت کو 3 سے ضرب دے کر مترادف نسبتیں حاصل کرتے ہیں۔

پہلی نسبت $= 2:3$

$= 2x5 \ : \ 3x5 = 10:15$

دوسری نسبت $= 5:4$

$= 5x3 \ : \ 4x3 = 15:12$

ہر دو نسبتوں میں ضیاء کا حصہ 15 ہے۔ پس نور، ضیاء اور کرن کی عیدی میں مسلسل نسبت اس طرح ہوگی:

کرن	:	ضیاء	:	نور
12	:	15	:	10

وضاحت :اگر ایک رکن مشترک ہو تو مسلسل نسبت معلوم کرنی آسان ہو جاتی ہے۔اس مثال میں ضیاء کی عیدی مشترک ہے۔ یہ پہلی نسبت میں 3 اور دوسری میں 5 ہے۔ ہم ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد یعنی ذواضعاف اقل معلوم کرتے ہیں جو 3 اور 5 کی جگہ مشترک رکن بن سکتا ہے۔ یہاں 3 اور 5 کا ذواضعافِ اقل 15 ہے۔ ہم اس کے مطابق نور اور کرن کی عیدی کی مترادف نسبتیں معلوم کرتے ہیں ے یہ اس مثال کی تفصیل تھی۔اس کو مختصراً اس طرح حل کریں گے۔

کرن کی عیدی	:	ضیا کی عیدی	:	نور کی عیدی
		3x5	:	2x5
4x3	:	5x3		
12	:	15	:	10

مثال 2: 560 روپے کو B,A اور C میں اس طرح تقسیم کریں کہ A اور B کے درمیان 2:3 اور B اور C کے درمیان 4:5 ہو۔

حل :

C	:	B	:	A
	:	3 x4	:	2x4
5x3	:	4x3		
15	:	12	:	8

مشترک رکن 3 اور 4 کا ذواضعافِ اقل 12 ہے۔ پہلی نسبت میں B کو 12 بنانے کے لیے پوری نسبت کو 4 سے ضرب دیا۔ دوسری نسبت میں B کو 12 بنانے کے لیے پوری نسبت کو 3 سے ضرب دیا۔

نسبتوں کا مجموعہ = 8 + 12 + 15 = 35

کل رقم = 560 روپے

A کا حصہ $= \frac{8 \times \cancel{560}^{16}}{\cancel{35}} = 128$ روپے

B کا حصہ $= \frac{12 \times \cancel{560}^{16}}{35} = 192$ روپے

C کا حصہ $= \frac{15 \times \cancel{560}^{16}}{35} = 240$ روپے

پس B,A اور C کے حصے بالترتیب 128 روپے '192 روپے اور 240 روپے ہیں۔

مثال 3: اگر مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہو تو ہر زاویے کی مقدار معلوم کیجیے۔

جبکہ A:B = 7:8 اور A:C = 1:3

حل:

زاویہ A کی مقدار	:	زاویہ B کی مقدار	:	زاویہ C کی مقدار
7	:	8		
1			:	3
1 x 7 = 7	:			3 x 7 = 21
7	:	8		21

مثلث ABC میں A اور B کے زاویوں کی مقداروں میں 7:8 ہے جبکہ زاویہ A اور C کی مقداروں میں زاویہ A کی مقدار، دونوں نسبتوں میں برابر کرنے کے لئے دوسری نسبت کو 7 سے ضرب دیتے ہیں۔

نسبتوں کا مجموعہ $= 7 + 8 + 21 = 36$

مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ $= 180^\circ$

زاویہ A کی مقدار $= \frac{7}{36} \times 180 = 35^\circ$

زاویہ B کی مقدار $= \frac{8}{36} \times 180 = 40^\circ$

زاویہ C کی مقدار $= \frac{21}{36} \times 180 = 105^\circ$

پس زاویے A , B اور C کی مقدار بالترتیب 30° , 40° اور 105° ہے۔

مثال 4:

فرض کیجئے کہ ہمیں کچھ رقم A , B اور C میں 2:3:7 میں تقسیم کرنی ہے۔ اگر یہ رقم 192 روپے ہو تو ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے۔

حل:

$A : B : C = 2 : 3 : 7$

نسبتوں کا مجموعہ $= 2 + 3 + 7 = 12$

پس اگر ہم کل رقم کو 12 حصوں میں تقسیم کریں تو A کو 2 حصے B کو 3 حصے اور C کو 7 حصے ملے۔

A کا حصہ $= \frac{2}{12} \times 192 = 32$ روپے

B کا حصہ $= \frac{3}{12} \times 192 = 48$ روپے

C کا حصہ $= \frac{7}{12} \times 192 = 112$ روپے

پڑتال : A کا حصہ + B کا حصہ + C کا حصہ $= 32 + 48 + 112$

$= 192$ روپے

مثال 5:

270 کلوگرام کو 4 : 3 : 2 : 1 میں تقسیم کریں۔

حل:

نسبتوں کا مجموعہ $= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

پہلا حصہ $= \frac{1}{10} \times 270 = 27$ کلوگرام

دوسرا حصہ $= \frac{2}{10} \times 270 = 54$ کلوگرام

تیسرا حصہ $= \frac{3}{10} \times 270 = 81$ کلوگرام

چوتھا حصہ $= \frac{4}{10} \times 270 = 108$ کلوگرام

پڑتال کلوگرام $27 + 54 + 81 + 108 = 270$

مشق نمبر 6.2

A : B : C معلوم کریں، جبکہ

1. A : B = 3 : 7 ، B : C = 7 : 2
2. A : B = 5 : 6 ، B : C = 7 : 8
3. A : B = 6 : 5 ، B : C = 4 : 5
4. A : B = 13 : 14 ، B : C = 17 : 16
5. A : B = 7 : 2 ، C : B = 4.3

6. فاطمہ اور ثریا کی عمروں میں 4اور 5 کی نسبت ہے، جبکہ ثریا اور زہرا کی عمروں میں 3اور 5 کی نسبت ہے۔ فاطمہ، ثریا اور زہرا کی عمروں میں مسلسل نسبت کیا ہوگی؟

7. شایان اور رحمان کے وزن میں 9 : 5 اور رحمان اور شوکت کے وزن میں 7:9 ہے۔ بتایئے کہ شایان اور شوکت کے وزنوں میں کیا نسبت ہے؟

8. رقیہ نے ایک انگوٹھی، ایک بندوں کی جوڑی اور ایک چین خریدی اور کل 9400 روپے سنار کو ادا کیے۔ اگر انگوٹھی اور بندوں کی جوڑی کی قیمتیں 5:3 کی نسبت اور بندوں کی جوڑی اور چین کی قیمتیں 4:5 میں ہوں تو بتایئے کہ رقیہ نے ہر زیور کی کیا قیمت ادا کی؟

9. 2790 روپے خالد، ہاشم اور اطہر میں اس طرح تقسیم کیجئے کہ خالد اور ہاشم کے حصوں میں $2\frac{1}{2} : 2$ اور ہاشم اور اطہر کے حصوں میں $6\frac{1}{2} : 5$ کی نسبت ہو۔

10. مثلث ABC کے زاویہ A اور زاویہ B کی مقداروں میں $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ ہے، جبکہ زاویہ B اور زاویہ C کی مقداریں $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ میں ہیں۔ مثلث ABC کے تینوں زاویوں کی مقدار معلوم کیجئے۔

شراکت (Partnership)

چھٹی جماعت میں ہم شراکت مفرد سے متعلق پڑھ چکے ہیں ایسی شراکت جس میں ایک مقررہ مدت تک کاروبار کیا جائے شراکت مفرد کہلاتی ہے۔اس کے برعکس اگر شراکت دار مختلف مدتوں کے لئے شراکتی کاروبارہ میں شریک ہوں تو یہ شراکت مرکب ہو گی۔

شراکت کے کاروبار میں سرمایہ لگانے کی مندرجہ ذیل صورتیں ہیں:

(I) حصہ داروں کا سرمایہ اور مدت برابر ہے۔ (شراکت مفرد)

(Ii) سرمایہ برابر ہے لیکن مختلف مدت کے لئے سرمایہ لگایا گیا۔ (شراکت مرکب)

(Iii) سرمایہ کی رقوم مختلف تھیں لیکن مدت برابر تھی۔ (شراکت مفرو)

(Iv) سرمایہ کی رقوم اور مدت دونوں مختلف تھیں۔ (شراکت مرکب)

شراکت مرکب میں سرمائے مختلف مدت کے لئے ہوتے ہیں ان کو ایک ہی سطح پر لانے کیلئے ہر سرمائے کو اس کی مدت سے ضرب دیتے ہیں۔

آیئے! شرکت کے کاروبار کی مختلف صورتوں کے لئے کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: اطہر، نیر، اظہر اور اسد نے ایک کاروبار میں بالترتیب 6000 روپے، 8000 روپے، 12,000 روپے اور 14000 روپے لگائے۔ ہر ایک کا حصہ فیصد معلوم کریں۔

حل:

کل سرمایہ $= 6000 + 8000 + 12000 + 14000$

$= 40,000$ روپے

اطہر کا فیصد حصہ $= \frac{6000}{40000} \times 100\% = 15\%$

نیر کا فیصد حصہ $= \frac{8000}{40000} \times 100\% = 20\%$

اظہر کا فیصد حصہ $= \frac{12000}{40,000} \times 100\% = 30\%$

اسد کا فیصد حصہ $= \frac{14000}{40,000} \times 100\% = 35\%$

مثال 2: زہرہ نے 10,000 روپے ایک سال کے لئے اور قیصرہ نے اسی کاروبار میں 15,000 روپے 9 ماہ کے لئے لگائے۔ انہیں کاروبار میں 6800 روپے کا منافع ہوا۔ دونوں کا الگ الگ نفع بتائیں۔

حل: اگر دونوں کے سرمایوں کی مدت یکساں نہیں ہے لہٰذا یہاں مدت کو یکساں بنانے کیلئے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ زہرہ ایک سال میں جتنا منافع کماتی ہے وہ اتنا منافع 12 گنا سرمایہ لگانے سے صرف ایک مہینے میں حاصل کرسکتی ہے۔ اسی طرح قیصرہ 15000 روپے لگا کر 9 مہینوں میں جتنے منافع کی حقدار بنتی ہے، اتنا ہی منافع 9 گنا سرمایہ لگانے سے ایک ہی مہینے میں حاصل کرسکتی ہے۔

زہرہ اور قیصرہ کے منافع میں نسبت $= 10000 \times 12 : 15000 \times 9$

$= 120000 : 135000$

$= 120 : 135$

$= 8 : 9$

نسبتی مجموعہ $= 8 + 9 = 17$

کل منافع $= 6800$ روپے

زہرہ کا منافع $= \frac{8}{17} \times 6800 = 3200$ روپے

قیصرہ کا نفع $= \frac{9}{17} \times 6800 = 3600$ روپے

مثال 3: رحیم اور خدابخش نے بالترتیب 18000 روپے اور 30000 روپے سے کاروبار شروع کیا۔ ایک سال بعد انہیں 15000 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع معلوم کریں۔

حل: کل سرمایہ $= 18000 + 30000$

$= 48000$ روپے

رحیم کا منافع $= \frac{15000}{48000} \times 18000 = 5625$ روپے

خدابخش کا نفع $= \frac{15000}{48000} \times 30000 = 9375$ روپے

مشق نمبر 6.3

(1) محمد حسن اور محمد حسین نے بالترتیب 8000 روپے اور 12000 روپے 5 ماہ کے لئے کاروبار میں لگائے۔ 2700 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع معلوم کیجئے۔

(2) آسیہ، آمنہ اور خورشید نے چار چار ہزار روپے کی شراکت سے کاروبار شروع کیا۔ 6 ماہ بعد انہیں 2400 روپے نفع ہوا۔ نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کیجئے۔

(3) الیاس، رحیم اور عمر نے ایک کاروبار میں بالترتیب 6000 روپے ایک سال کے لئے، 6000 روپے 10 ماہ کے لئے اور 6000 روپے 8 ماہ کے لئے لگائے۔ ایک سال بعد انہیں 2400 روپے کا نقصان ہوا۔ بتائیں ہر ایک کو کتنا نقصان برداشت کرنا پڑا؟

(4) چار بھائیوں نے ایک کاروبار میں بالترتیب 3،5،2 اور 10 ماہ کی مدت تک کے لئے برابر برابر سرمایہ لگایا۔ کچھ مدت بعد انہیں 6000 روپے فائدہ ہوا۔ ہر ایک کا نفع معلوم کریں۔

(5) عثمان اور احمد نے ایک مشترکہ کاروبار میں ایک سال کے دوران 40,000 روپے نفع کمایا۔ اگر ان کے سرمائے میں 3:5 ہو تو دونوں کا نفع معلوم کریں۔

(6) ایک کاروبار میں ذیشان نے 3300 روپے 3 ماہ کے لئے غفران نے 2700 روپے 7 ماہ کے لئے، شایان نے 9000 روپے 2 ماہ کے لئے لگائے۔ کچھ مدت بعد انہیں 4680 روپے نقصان ہوا۔ بتائیں ہر ایک کو کتنا نقصان برداشت کرنا پڑا؟

(7) ایک کاروبار میں علی نے 10500 روپے 4 ماہ کے لئے اور امجد نے 16800 روپے 5 ماہ کے لئے لگائے انہیں 6300 منافع ہوا۔ نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

(8) رفیق نے 5000 روپے اور حمید نے 4000 روپے لگا کر کاروبار شروع کیا۔ رفیق کا سرمایہ پورے سال لگا رہا وہ لیکن حمید نے 10 ماہ کے بعد اپنا سرمایہ واپس لے لیا۔ اگر سال کے بعد 2250 روپے نقصان ہوا ہو تو ہر ایک کا نقصان فیصد معلوم کریں۔

باب نمبر 7 الجبرا

چھٹی جماعت میں آپ مسلمان ریاضی دان الخوارزمی ابن موسیٰ کے متعلق پڑھ چکے ہیں اور جانتے ہیں کہ الجبرے کا نام بھی ان کی کتاب "الجبروالمقابلہ" کے نام سے اخذ کیا گیا۔ الخوارزمی کی الجبرے میں علمی استعداد نے دوسرے مسلمان ریاضی دانوں پر بہت اثر کیا۔ اس طرح سے الجبرے کی تاریخ پر مسلمان علماء کی کوششوں کا اثر ناقابل تردید ہے۔ ہم آپ کو ایک مشہور ریاضی دان سے متعارف کراتے ہیں۔

عمر ابن ابراہیم خیام (1050-1123) جو عمر خیام کے نام سے مشہور ہیں، ایران کے شہر نیشاپور کے رہنے والے تھے۔ وہ اپنے وقت کے مشہور فلسفی، شاعر، ماہر فلکیات اور ریاضی دان تھے۔ ان کا تیار کردہ کیلنڈر اس قدر درست تھا کہ آج بھی اس کا استعمال جاری ہے۔ رباعیات عمر خیام مشہور زمانہ ہیں۔ الجبرے کے علم میں انہوں نے بے اندازہ اضافہ کیا۔

بنیادی الجبرے کے بہت سے تصورات کا آپ چھٹی جماعت میں مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس باب میں ہم درج ذیل عنوانات کے تحت ان کا اعادہ کریں گے۔ (1) الجبری جملے (2) کثیر رقمیاں (3) کثیر رقمیوں پر بنیادی عوامل کا مطالعہ کریں گے۔

الجبری فقرے

آپ چھٹی جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ ہم الجبری فقروں میں اعداد (مستقل) اور متغیر کے لیے حروف تہجی استعمال کرنے کے علاوہ بنیادی عوامل کی علامات + , - , x اور ÷ استعمال کرتے ہیں۔ جمع اور تفریق کی علامات الجبری فقروں کو رقوم میں تقسیم کرتی ہیں۔ مثلاً

$5x + 7y$ میں 2 رقوم ہیں۔

$7x^2 - 2xy + 5y^2 + z$ میں 4 رقوم ہیں۔

ab میں ایک رقم ہے۔

$mn+m \div n$ میں 2 رقوم ہیں۔

$5x + 7y$ کی دو رقوم $5x$ اور $7y$ ہیں۔

$5x$ کا عددی سر 5 ہے اور $7y$ کا عددی سر 7 ہے۔

$7x^2 - 2xy + 5y^2 + z^2$ کی رقوم $7x^2$, $-2xy$, $5y^2$, z^2

$7x^2$ کا 7 , $-2xy$ کا -2 , $5y^2$ کا 5 اور z^2 کا 1 عددی سر ہے۔

اسی طرح ab کا عددی سر 1 ہے۔

$mn+m \div n$ کی دو رقوم mn اور $m \div n$ ہیں اور دونوں کا عددی سر 1 ہے۔ اگر دو یا دو سے زیادہ رقوم میں اساس اور قوت نما بالترتیب یکساں ہوں تو ایسی رقوم کو یکساں رقوم یا ہم قسم رقوم کہتے ہیں۔

مثلاً $5x$, $3x$, $-6x$ یکساں رقوم ہیں۔

اسی طرح ab , $-9ab$, $3ab$ یکساں رقوم ہیں۔

مشق نمبر 7.1 (زبانی)

① بتائیے کہ درج ذیل الجبری فقروں میں کتنی رقوم ہیں؟

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $15xy^2$

(iii) $-ax + b \div y$ (iv) $ax^2 + by^2 + cz^2$

② مندرجہ ذیل فقروں میں رقوم کے عددی سر بتائیے۔

(i) $8x$ (ii) $-8z$ (iii) $ax - by$

(iv) $15xyz - 5y$ (v) $-\frac{5x}{7} + 12xy - 3yz$

③ الجبری فقروں میں یکساں رقوم علیحدہ کیجئے:

(i) $5y^2 - 2y^3 + 6y + 4 - 8y - y^2$ (ii) $3t + 4v + u - 2v$

(iii) $2b^2 - 3b + 4b^2 + 5b - 8$ (iv) $xy - xz + yz + 2yz$

کثیر رقمی فقرے

ایسا الجبری فقرہ جو ایک یا ایک سے زیادہ رقموں پر مشتمل ہو اور جس کی ہر رقم میں متغیر یا متغیرات کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہو، کثیر رقمی کہلاتا ہے۔ ریاضی کی اصطلاح کے مطابق ایک رقم والا فقرہ بھی کثیر رقمی ہے۔ ایک رقم والے فقرے کو ایک رقمی سادہ فقرہ کہتے ہیں مثلاً $3ab, -5b, 6a^2, 4$ ایک رقمی فقرے ہیں اور دو یا دو سے زیادہ ایک رقمی فقروں کا مجموعہ کثیر رقمی یا مرکب فقرہ ہوتا ہے۔

مثلاً $x^2+3xy-4, a+3b, x+2$ کثیر رقمیاں ہیں کیونکہ متغیرات کا قوت نما مثبت صحیح عدد ہے۔

جبکہ $x + \frac{1}{x}$ اور x^{-2} کثیر رقمیاں نہیں ہیں کیونکہ متغیرات کا قوت نما مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔

ہر کثیر رقمی کا کوئی ایک مثبت درجہ ہوتا ہے جو ایک متغیر کی صورت میں متغیر کے بڑے سے بڑے قوت نما سے متعین کیا جاتا ہے، مثلاً x^2+2x+3 میں متغیر x کا بڑے سے بڑا قوت نما 2 ہے۔ اس لئے کثیر رقمی فقرے x^2+2x+3 کا درجہ 2 ہے اور اسے دو درجی کثیر رقمی فقرہ (Quadratic Polynomial) کہتے ہیں۔

اسی طرح $x^3 - x^2 + x + 6$ ایک تین درجی کثیر رقمی فقرہ (Cubic Polynomial) ہے۔

جس کثیر رقمی میں ایک سے زیادہ متغیر ہوں، اس فقرے کا درجہ متغیروں کے قوت نماؤں کا مجموعہ ہوتا ہے،

مثلاً $a^3 + a^2b + ab^2$ ایک تین درجی کثیر رقمی ہے۔

چار درجی کثیر رقمی فقرے (Quartic Polynomials) میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 4 ہوتا

ہے۔دو متغیر ہونے کی صورت میں متغیرات کے قوت نماؤں کا مجموعہ 4 ہوگا۔درج ذیل مثالوں سے کثیر رقمی کے درجے کا تعین واضح ہو جائے گا۔

$3x + 4$	ایک درجی کثیر رقمی ہے جس میں ایک متغیر ہے۔
$x+y$	ایک درجی کثیر رقمی ہے جس میں 2 متغیر ہیں۔
$x^2 - 2x + 1$	دو درجی کثیر رقمی ہے جس میں ایک متغیر ہے۔
$xy + x + y$	دو درجی کثیر رقمی ہے جس میں 2 متغیر ہیں۔
$x^3 + 2x^2 + 1$	تین درجی کثیر رقمی ہے جس میں ایک متغیر ہے۔
$x^2 y + xy^2$	تین درجی کثیر رقمی ہے جس میں دو متغیر ہیں۔
$x^4+3x^3 - 2x^2 + 1$	چار درجی کثیر رقمی ہے جس میں ایک متغیر ہے۔
$x^2 yz- xy^2 + xyz^2$	چار درجی کثیر رقمی ہے جس میں 3 متغیر ہیں۔

یاد رکھیے مستقل بھی کثیر رقمی ہے جس کا درجہ صفر ہے کیونکہ متغیر کا قوت نما صفر ہے۔

مشق نمبر 7.2

① کثیر رقمی میں رقموں کی تعداد بتایئے۔

(i) $a^2 + b^2 + c^2$ (ii) $mn + n^2$ (iii) $m \div n-p$

(iv) $xy + yz + zx$ (v) $a^2bc + b^2ca + c^2ab + 1$

② درج ذیل کثیر رقمیوں کے درجے بتایئے:

(i) $3x - 7$ (ii) $x^2 + 5x + 6$ (iii) $xy^2 + x^2y$

(iv) $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ (v) $y^4 - 1$

(vi) $x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2 yz^2$ (vii) $19 \; x y^5$

کثیر رقمی فقرے اور بنیادی عوامل
کثیر رقمی کی جمع

مثال 1: ایک رقمی یا سادہ فقروں کے جمع کے طریقے کو سمجھنے کے لیے چند مثالیں حل کرتے ہیں۔

7a اور 3a کو جمع کریں۔

$7a + 3a$

$= (7+3)a$ (ضرب کی خاصیت تقسیمی)

$= 10a$

مثال 2: 5ab, 6ab اور 7ab- کو جمع کریں۔

$6ab + 5ab - 7ab$

$= (6+5-7)\, ab$

$= (11-7)\, ab$

$= 4ab$

مثال 2 کو ہم اس طرح بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 6ab \\ 5ab \\ \underline{-7ab} \\ 4ab \end{array}$$

اس طریقے میں یکساں رقوم کو ایک دوسرے کے نیچے لکھ کر عددی سروں کو سمتی اعداد کے اصول کے مطابق جمع کر کے مختصر کر لیتے ہیں۔ ایک سے زیادہ رقوم والی کثیر رقمیوں کو جمع کرنے کے لیے درج ذیل مثالیں دیکھیے۔

مثال 3: $(3a + 2b)$ اور $(2a + 5b)$ کو جمع کریں۔

$(3a + 2b) + (2a + 5b)$

$= 3a + 2b + 2a + 5b$

$= 3a + 2a + 2b + 5b$ (جمع کی خاصیت تلازم)

$= (3 + 2)\, a + (2 + 5)\, b = 5a + 7b$

دوسرا طریقہ

$$\begin{array}{r} 3a+2b \\ \underline{2a+5b} \\ 5a+7b \end{array}$$

دیئے ہوئے فقروں کو اس طرح اوپر نیچے لکھتے ہیں کہ یکساں رقوم کا ایک کالم میں آجائیں۔ پھر ان یکساں رقوم کو سمتی اعداد کے اصول کے مطابق جمع کرنے سے دیئے ہوئے فقروں کا حاصل جمع آجاتا ہے۔

مثال 4: $a+2b+3c,\ 4a+5b+6c$ اور $7a+8b+9c$ جمع کریں۔

حل:

کیثر رقموں کو بالترتیب لکھ کر جمع کرنے سے

$$\begin{array}{rcrcr} 4a & + & 5b & + & 6c \\ a & + & 2b & + & 3c \\ 7a & + & 8b & + & 9c \\ \hline 12a & + & 15b & + & 18c \\ \hline \end{array}$$

a کے عددی سروں کا مجموعہ
b کے عددی سروں کا مجموعہ
c کے عددی سروں کا مجموعہ

مثال 5: $9a^2+5b^2+c^2,\ 2a^2+7b^2+6c^2$ اور $4a^2+3b^2+8c^2$ جمع کریں۔

$$\begin{array}{rcrcr} 9a^2 & + & 5b^2 & + & c^2 \\ 2a^2 & + & 7b^2 & + & 6c^2 \\ 4a^2 & + & 3b^2 & + & 8c^2 \\ \hline 15a^2 & + & 15b^2 & + & 15c^2 \\ \hline \end{array}$$

مثال 6: $4x^2+5xy+y^2,\ -3x^2-6y^2$ اور $8xy+5y^2$ کو جمع کریں۔

$$\begin{array}{rcrcr} 4x^2 & + & 5xy & + & y^2 \\ -3x^2 & & & - & 6y^2 \\ & + & 8xy & + & 5y^2 \\ \hline x^2 & + & 13xy & + & 0 \\ \hline x^2 & + & 13xy & & \end{array}$$

نوٹ: اگر عددی سروں کا مجموعہ صفر آجائے تو پوری رقم صفر بن جائے گی۔

مشق نمبر 7.3

مندرجہ ذیل رقوم کو جمع کریں:

① $5a, 8a$ 2. $a, a,$

③ $-- 12x, -3x$ 4. $9ab, -7ab$

⑤ $8y, 3y, -4y$

حاصل جمع معلوم کریں:

⑥ $2a + 3b, 6a + 5b$

⑦ $4a + 6b + 5c, 7a + 5b + 5c, 3a + 7b + 7c$

⑧ $3x-4y, 4x + 6y$

⑨ $ab + 4cd + 6ad, 8ab + 5cd + 6ad$

⑩ $4.5a + 5.7b + 3.2c, 3.5a + 1.3b + 2.8c$

⑪ $1.7a + 3.2b + 4.9c, 4.3a + 3.2b + 3.1c, 6.0a + 1.1b + 0.3c$

⑫ $6a + 11b + 10c$

$13a + 9b + 5c$

$8a + 7b + 12c$

⑬ $2a^2 -- 3b^2$

$4a^2 + 5b^2$

$5a^2 - 8b^2$

⑭ $2a^2 + 3b^2 + 4c^2$

$6a^2 + 8b^2 + 4c^2$

$3a^2 + 2b^2 + 3c^2$

⑮ $14e - 15f + 10g$

$13e + 14f - g$

$-5e + 3g$

(ب) کثیر رقمیوں کی تفریق:

ہم جانتے ہیں کہ تفریق کا عمل جمع کا معکوس عمل ہے۔ سمتی اعداد کے اصول کے مطابق

$$5-2 = 5 + (-2)$$

اسی طرح

$$a - b = a + (-b)$$

یعنی a میں سے b تفریق کرنے کے لئے ہم a میں b کا جمعی معکوس یعنی b- جمع کرتے ہیں۔

پس ایک فقرے سے دوسرے فقرے کو تفریق کرنے کے لئے ہم دوسرے فقرے کی رقموں کی علامت تبدیل کر کے انہیں پہلے فقرے میں جمع کر دیتے ہیں۔

مثال 1: 13a میں سے 7a کو تفریق کریں۔

دی ہوئی تعریف کی رو سے 7a کا جمعی معکوس (-7a) ہے۔ اس کو 13a میں جمع کریں گے۔

$= 13a + (-7a)$

یا

$= 6a$

یا

$= (13-7)\, a$

$= 6a$

مثال 2: 15b میں سے 17b- کو تفریق کریں۔

حل: دی ہوئی تعریف کی رو سے 17b- کا جمعی معکوس 17b+ ہے۔ اس کو 15b میں جمع کریں گے۔

$$\begin{array}{r} 15b \\ +\underline{17b} \\ 32b \end{array}$$

یا

$15b + 17b$

$= (15+17)b$

$= 32b$

مثال 3: 3a + 8b سے 2a + 5b کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 3a + 8b \\ \underline{-2a \pm 5b} \\ a + 3b \end{array}$$

حاصل تفریق ہے۔

مثال4: $3x - 2y + 5z$ میں سے $2x + 3y - 4z$ کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{rrrr} & 3x & - 2y & + 5z \\ & -2x & \underset{-}{+} 3y & \underset{+}{-} 4z \\ \hline \text{حاصل تفریق} & x & - 5y & + 9z \\ \hline \end{array}$$

مثال5: $3x^2 + 8x + 1$ اور $2x^2 + 3x - 6$ کے مجموعے میں سے $4x^2 - x + 2$ کو تفریق کریں۔

حل:

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 & + 8x & + 1 \\ & 2x^2 & + 3x & - 6 \\ \hline \text{مجموعہ} & 5x^2 & + 11x & - 5 \\ & -4x^2 & \underset{+}{-} x & \underset{-}{+} 2 \\ \hline \text{حاصل تفریق} & x^2 & + 12x & - 7 \\ \hline \end{array}$$

مشق نمبر 7.4

پہلے فقرے میں سے دوسرا فقرہ تفریق کریں۔

① $8a, \quad 5a$

② $-7ab, \quad 12ab$

③ $4a^2, \quad -8a^2$

④ $6a + 7b, 2a + 3b$

⑤ $9a + 11b + 15c, \quad 5a + 3b - xc$

⑥ $9c + 8d + 6e, 3e - 5c + 4d$

⑦ $18x + 16y + 12z, 10x + 9y + 8z$

⑧ $14a^2 + 15b^2 + 16c^2, 8a^2 + 10b^2 - 2c^2$

⑨ $25ab + 21bc + 18cd, 18ab - 6bc + 15cd$

⑩ $5a^2 + 4ab + 2b^2, 4a^2 + 3ab + b^2$

⑪ $13a + 8b + 12c$ اور $9a + 3b + 5c$ کے مجموعے میں سے $10a + 10b + 17c$ کو تفریق کریں۔

⑫ $2x^2 + 5y^2$ میں کیا جمع کریں کہ $6x^2 + 8y^2$ حاصل ہو جائے۔

کثیر رقمیوں کی ضرب

ایک رقمی کو ضرب دیتے وقت عددی سروں اور متغیروں کو آپس میں الگ الگ ضرب دیتے ہیں۔ اگر اساس ایک ہو تو ضرب کے عمل میں متغیر کے قوت نما جمع کرتے ہیں۔

مثال 1: $2a$ اور $3a^2$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:

$$2a \times 3a^2$$
$$= 2 \times 3 \times a \times a^2$$
$$= 6a^{1+2} = 6a^3$$

مثال 2: $8a^4$ کو $9b^3$ سے ضرب دیجئے۔

حل:

$$8a^4 \times 9b^3$$
$$= 8 \times 9 \times a^4 \times b^3$$
$$= 72a^4 b^3$$

نوٹ: چونکہ a^4 اور b^3 میں اساس مختلف ہیں، اس لئے قوت نما جمع نہیں ہو سکتے۔

مثال 3: $3ay^2$ اور $7a^2 y^3$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:

$$3ay^2 \times 7a^2y^3$$
$$= 3 \times 7 \times a \times a^2 \times y^2 \times y^3$$
$$= 21a^{1+2} y^{2+3}$$
$$= 21 a^3y^5$$

آیئے! اب ہم کثیر رقمی کو ایک رقمی سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 4: (a+b) کو 3 سے ضرب دیں۔

حل: افقی طریقہ $3x(a+b)$

ضرب کی خاصیت تقسیمی $= 3xa + 3xb$

$= 3a + 3b$

عمودی طریقہ

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ 3 \\ \hline 3a + 3b \\ \hline \end{array}$$

(فقرے کی ہر رقم کو 3 سے ضرب دی)

مثال 5: $2a + 3b$ کو a سے ضرب دیں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 2a + 3b \\ \times\ a \\ \hline 2a^2 + 3ab \\ \hline \end{array}$$

مثال 6: $3e + 5f$ کو $4e+2f$ سے ضرب دیں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 3e + 5f \\ \times\ 4e + 2f \\ \hline 12e^2 + 20ef \\ + 6ef + 10f^2 \\ \hline 12e^2 + 26ef + 10f^2 \end{array}$$

(پہلے فقرے کی ہر رقم کو 4e سے ضرب دی)

(پہلے فقرے کی ہر رقم کو 2f سے ضرب دی)

(دونوں فقروں کا مجموعہ حاصل ضرب ہے)

مثال 7: $a+b+c$ اور $d+e$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} (a + b + c) \\ (d+e) \\ \hline ad + bd + cd \\ + ae + be + ce \\ \hline ad+bd+cd+ae+be+ce \\ \hline \end{array}$$

$ad+bd+cd+ae+be+ce$ حاصل ضرب ہے۔

مشق نمبر 7.5

دی ہوئی کثیر رقموں کا حاصل ضرب معلوم کیجئے

(1) $15a, 8a$ (2) $9a, 6b$

(3) $10a^2, 2a^5$ (4) $4c^5, 8cd^2$

(5) $6a^2b, 5b^2$ (6) $3a+2b, \quad 3$

(7) $a^2+b^2+c^2, 2a$ (8) $8c+12d, 3c+2d$

(9) $a+b, a+b$ (10) a^2+b^2, a^2-b^2

(11) $a+b+c, a+b+c$ (12) $a^2+ab+b^2, a+b$

کثیر رقمیوں کی تقسیم

مثال 1: a^4 کو a^2 پر تقسیم کیجئے۔

حل: $a^4 \div a^2$

$$= \frac{a^4}{a^2} = \frac{a x a x a x a}{a x a} = a x a$$

$$= a^2$$

یاد رکھیے

ایک ہی اساس کے ایک رقمی فقرے کو کسی دوسرے ایک رقمی فقرے پر تقسیم کرتے وقت مقسوم کے قوت نما میں سے مقسوم علیہ کا قوت نما تفریق کیا جاتا ہے۔

مثال 2: b^9 کو b^5 پر تقسیم کیجئے۔

حل:

$$b^9 \div b^5$$
$$= \frac{b^9}{b^5}$$
$$= b^{9-5}$$
$$= b^4$$

مثال 3: $16a^6$ کو $4a^2$ پر تقسیم کیجئے۔

حل:

$$= 16a^6 \div 4a^2$$
$$= \frac{16a^6}{4a^2} = \frac{16 \times a^6}{4 \times a^2}$$
$$= 4xa^{6-2} = 4a^4$$

مثال 4: $9a^5b^3$ کو $3a^2b^2$ پر تقسیم کیجئے۔

حل:

$$9a^5b^3 \div 3a^2b^2$$
$$= \frac{9a^5b^3}{3a^2b^2} = \frac{9}{3} \times \frac{a^5}{a^2} \times \frac{b^3}{b^2}$$
$$= 3a^{5-3}\ b^{3-2}$$
$$= 3a^3\ b$$

آیئے! اب ہم کثیر رقمی کی ایک رقمی فقرے سے تقسیم سیکھتے ہیں۔

مثال 5: $4a^2+8ab$ کو $4a$ سے تقسیم کیجئے۔

حل:

پہلا طریقہ $(4a^2 + 8ab) \div 4a$

$$= \frac{4a^4+8ab}{4a}$$

مقسوم کی رقموں کو $4a$ سے تقسیم کیا۔

$$= \frac{4a^2}{4a} + \frac{8ab}{4a}$$

$$= a + 2b$$

دوسرا طریقہ:

$$\begin{array}{r|l} & a + 2b \\ 4a & 4a^2 + 8ab \\ & -4a^2 \\ \hline & \quad 8ab \\ & \quad -8ab \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

تشریح:

$$\frac{4a^2}{4a} = \frac{4}{4} x \frac{a^2}{a} = a$$

$$4a^{1+1} x \; 4a^2$$

$$\frac{8ab}{4a} = \frac{8}{4} x \frac{ab}{a} = 2b$$

مثال 6: $4a^2+4ab+b^2$ کو $2a+b$ سے تقسیم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 2a+b \\ 2a+b & 4a^2+4ab+b^2 \\ & \pm 4a^2 \pm 2ab \\ \hline & \quad 2ab+b^2 \\ & \quad \pm 2ab \pm b^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

$2a + b$ جواب ہے۔

مثال7: $(a+3b)$ کو $a^3+4a^2b+4ab^2+3b^3$ پر تقسیم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + ab + b^2 \\ a+3b & a^3 + 4a^2b+4ab^2+3b^3 \\ & \underline{-a^3 \pm 3a^2b} \\ & \quad a^2b+4ab^2 \\ & \quad \underline{-a^2b \pm 3ab^2} \\ & \qquad ab^2+3b^3 \\ & \qquad \underline{-ab^2 \pm 3b^3} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

$a^2 + ab + b^2$ جواب ہے۔

مشق نمبر 7.6

تقسیم کیجئے۔

(1) $8x$ کو 2 سے

(2) $15a$ کو 5 سے

(3) $x3x$ کو x سے

(4) $35a^7$ کو $7a^4$ سے

(5) $6m^2$ کو m^2 سے

(6) $10p^2q^2$ کو $5pq$ سے

(7) $55x^2y^2z^2$ کو $11x^2y^2$ سے

(8) 5 سے $15a + 10b$ تقسیم کریں

درج ذیل کی کثیر رقمیوں کے خارج قسمت معلوم کیجئے۔

(9) $(a^2+3ab+2b^2)\div(a+b)$

(10) $(6a^2+13ab+6b^2)\div(3a+2b)$

(11) $(10c^2+49cd+49d^2) \div (5c+7d)$

الجبری اظہاریے اور ان کی قیمت معلوم کرنا

ریاضی میں اکثر اوقات کسی عدد کے اظہار کے لئے مختلف طریقے استعمال کیے جاتے ہیں۔

مثلاً $2 + 4$ ، 3×2 ، $12 \div 2$ ، $10 - 4$ ، $\frac{18 + 112}{5}$

یہ تمام اظہاریے عدد 6 اظہار کرنے والے مختلف اظہاریے ہیں۔ ایسے اظہاریوں سے جس عدد کا اظہار ہوتا ہے۔ اسے اس کی "قیمت" (Value) کہتے ہیں۔

اسی طرح $x + y$ ' $2ab - c$ ' $x^2 + 3y^4$ ' $2 - y$ ' $\frac{1}{2}z - y$ ' $a + b - c$ ....

وغیرہ میں سے ہر ایک الجبری اظہاریہ کہلاتا ہے۔ جس میں a ' b ' c '.....وغیرہ نامعلوم اعداد ہیں۔

اگر کسی الجبری اظہاریے میں استعمال ہونے والے نامعلوم اعداد کی قیمتیں متعین کر دی جائیں اور اظہاریے کو مختصر کیا جائے تو حاصل ہونے والا عدد اظہاریے کی "قیمت (Value)" ہوگا

الجبریا ظہارویں کی قیمت معلوم کرنے کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1:

اگر $x = 3$

تو $x + 4 = 3 + 4$

$= 7$

اور 7 کو $x + 4$ کی قیمت کہتے ہیں جب کہ $x = 3$ ہو۔

اسی طرح اگر $x = 7$

تو $x + 4 = 7 + 4$

$= 11$

اب 11 الجبری اظہاریے $x + 4$ کی قیمت ہے جب کہ $x = 7$ ہے۔

اگر x کی قیمتیں بدلتی جائیں تو الجبری اظہاریے $x + 4$ کی مختلف قیمتیں حاصل ہوتی رہیں گی۔ اسی وجہ سے اس الجبری اظہاریے میں x کو متغیر کہیں گے۔ اس طرح $2y + 5$ میں y متغیر ہے۔ کیونکہ y کی قیمتیں

بدلنے سے $2y + 5$ قیمتیں بھی بدلتی جائیں گی۔

مثلاً اگر $y = 6$

تو $2y + 5 = 2 \times y + 5$

$= 2 \times 6 + 6$

$= 12 + 5$

$= 17$

کسی الجبری اظہاریے میں ایک سے زیادہ متغیر بھی ہو سکتے ہیں۔

مثلاً الجبری اظہاریے $\frac{4x - 3}{x + y - 2x}$ میں تین متغیر استعمال ہوئے ہیں۔

مثال 2: اگر $a = 1$ ، $b = 2$ اور $c = 3$ ہو تو $a^2 - 3b + c^3$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: $a^2 - 3b + c^3$

$= (1)^2 - 3(2) + (3)^3$

$= 1 - 6 + 27$

$= 22$

مثال 3: اگر $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 1$ ، $8 = 1$

تو $\frac{4x - z}{x + y + 2z}$ قیمت معلوم کیجیے

حل: y , x اور z کی قیمتیں درج کرنے سے

$= \frac{4x - z}{x + y + 2z}$

$= \frac{4(\frac{1}{2})-1}{\frac{1}{2}+1+1}$

$$= \frac{2-1}{\frac{1}{2}+2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+4}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

مشق نمبر 7.7

① اگر $x = 2$ ' $y = 1$ ' $z = 3$ ' $p = 4$ تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x + 5$ (ii) $3 - x$ (iii) $4x$

(iv) $\frac{y}{3}$ (v) $3y + 2$ (vi) $\frac{y+z}{x}$

(vii) $\frac{py + xz}{5}$ (viii) $2x^2$ (ix) $5y^3$

(x) $px^2 - py + z$ (xi) $-px + p^2y + p$ (xii) $\frac{p^3}{z^2}$

② اگر $x = 4$ ' $y = 2$ ' $z = 1$ ' $p = 3$ اور $q = 0$ تو مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $xyz - 2yz$ (ii) $11xz - py + 4q$

(iii) $\frac{1}{2}xz + \frac{1}{3}py + \frac{1}{8}zx$ (iv) $\frac{2x+y}{2p+4x}$

(v) $(2xy \div z) \div 3px$

(vi) $\frac{z+2x-3y}{2p+4x}$ (vii) $4qy \div 8px + yz$

(viii) $\frac{p^2q^2}{x}$ (ix) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(x) $P^2 + q^2 + x^2 - 2xz - 2yz$ (xi) $\frac{pq + z^4}{4x + y^2}$

(xii) $\frac{x^3 + y^3 - z^3}{p^3 - q^3}$

ایک متغیر میں مساوات

مساوات الجبرے کا ایک بہت اہم جزو ہے۔ کئی مشہور ریاضی دانوں کا کام مساوات میں پیش ہوا اور شہرت کا سبب بنا۔ آپ نے نیوٹن (1727-1642) کا نام سنا ہوگا۔ وہ برطانیہ کا رہنے والا مشہور سائنس دان تھا اس نے اجسام کی حرکت کے متعلق جو مساوات معلوم کیں، ان کی وجہ سے سائنس میں ایک انقلاب آیا۔ آپ کو یہ جان کر حیرت ہوگی کہ اور ایک مساوات نے دنیا کی تاریخ کا رخ موڑ دیا۔ البرٹ آئن سٹائن (1955-1879) جرمنی کا رہنے والا بہت مشہور سائنس دان تھا۔ اس نے ایک ایسی مساوات معلوم کی جو مادے اور توانائی کے تعلق کو ظاہر کرتی ہے اور جس کے سبب انسان ایٹمی توانائی کے استعمال سے روشناس ہوا۔

آپ چھٹی جماعت میں الجبری جملوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں اور جانتے ہیں کہ بنیادی طور پر جملے تین قسم کے ہوتے ہیں۔

(i) وہ جملہ جس کے دونوں طرف کے فقرے دی ہوئی شرائط کے مطابق صحیح تعلق کو ظاہر کرتے ہوں، درست جملہ کہلاتا ہے

مثلاً $5 + 9 = 14$

$4a + 2a = 6a$

$x + 5 > x$

درست جملے ہیں۔

(ii) وہ جملہ جس کے دونوں طرف کے فقرے دی ہوئی شرائط کے مطابق درست تعلق ظاہر نہ کرتے ہوں، غلط جملہ کہلاتا ہے۔

مثلاً $a + 2a = 4a$

$5x + 6x < 10x$ وغیرہ

(iii) کھلے جملے یعنی وہ جملے جن کے صحیح یا غلط ہونے کا دارومدار ان کی قیمت پر ہو۔

مثلاً $8a + 2 = 10$ یہ جملہ صرف $a=1$ کے لیے درست ہے۔

$2x > 3$ یہ جملہ $x=1$ کے لئے غلط ہے۔

$4b < 3b + 5$ اس جملے میں اگر $b<5$ ہو تو جملہ درست ہے۔

اوپر دیے ہوئے جملے کھلے جملوں کی مثالیں ہیں۔

اب ہم مندرجہ ذیل تصورات پڑھیں گے۔

(i) ایک متغیر میں خطی مساوات اور غیر مساوات

(ii) ایک متغیر میں خطی مساوات اور غیر مساوات کو حل کرنا

(iii) ایک متغیر میں خطی مساوات اور غیر مساوات کے الجبری مسائل کو حل کرنا۔

ایک متغیر میں خطی مساوات

آپ مندرجہ ذیل جملوں پر غور کریں:

(i) $a + 3 = 5$ (ii) $2b - 1 < 7$ (iii) $3p > 5$

(iv) $2m + 3 < 8$ (v) $n - 10 = 5$ (vi) $E > 1$

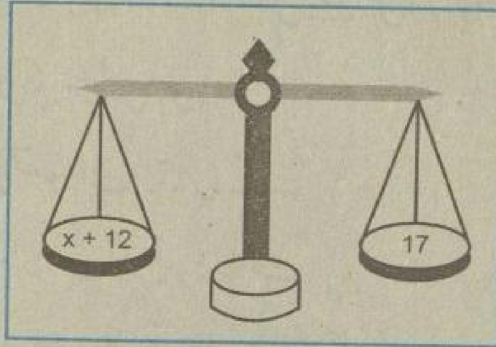
آپ جانتے ہیں کہ یہ تمام کھلے جملے کہلاتے ہیں اور ان میں سے (i) اور (v) میں "=" کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ اس لیے یہ دونوں جملے مساوات کہلاتے ہیں۔ (ii) اور (ivl) میں "<" کی علامت ہے اور اسی طرح (iii) اور (vi) میں ">" کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ اس لیے۔ (ii), (iv) , (iii) اور (vi) غیر مساوات کہلاتے ہیں۔

پس ایسے کھلے جملے جن میں علامت "=" استعمال کی جائے مساوات کہلاتے ہیں۔ جن جملوں میں علامات "<" اور ">" کا تعلق پایا جائے غیر مساوات کہلاتے ہیں۔

مثلاً $2x + 3 = 11$ ایک مساوات ہے۔ اس میں ایک متغیر x استعمال ہوا ہے۔ اس لئے یہ ایک متغیر میں مساوات ہے۔ اس مساوات میں چونکہ x کا قوت نما ایک ہے۔ اس لئے یہ ایک درجی مساوات ہے۔ $2x+3=11$ ایک متغیر میں ایک درجی مساوات ہے۔ ایک متغیر میں ایک درجی مساوات کو سادہ

مساوات یا خطی مساوات (Linear Equation) بھی کہتے ہیں۔

جب ہم الجبری جملہ $x + 12 = 17$ لکھتے ہیں تو ظاہر ہوتا ہے کہ ایک طرف کی مقدار $(x + 12)$ اور دوسری طرف کی مقدار (17) کے برابر ہے۔ ہم اسے ترازو کی صورت میں ایک شکل سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔



یہ مساوات صرف اس صورت میں صحیح ہو گی جب x کی قیمت 5 ہو۔ اس قسم کی آسان صورت میں مساوات کی نا معلوم مقدار آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ بعض صورتوں میں مساوات مشکل شکل میں ہوتی ہیں۔

مثلاً $$\frac{3a + 9}{21} = 1$$

اس قسم کی مساوات میں نا معلوم مقدار اندازے سے معلوم نہیں کی جا سکتی بلکہ مساوات کو حل کرنے کی ضرورت ہے۔ یہاں ہم اس تقسیم کی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ یعنی متغیر یا نا معلوم مقدار کی قیمت معلوم کرنا سیکھیں گے۔ متغیر یا نا معلوم مقدار کی ایسی قیمت یا قیمتیں جس کے لئے الجبری جملہ درست ہو، اس جملے کا حل سیٹ کہلاتا ہے۔ اوپر دی ہوئی مساوات $x + 12 = 7$ کے لیے $x = 5$ اس لیے $x + 12 = 7$ کا حل $x = 5$ ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل جملوں میں a کی قیمت بتائیں :

(i) $a + 5 = 11$ (ii) $a - 6 = 14$

(iii) $a + 2 > 3$ (iv) $3a = 18$

(v) $2a + 7 < 9$

حل :

(i) میں $a = 6$ کیونکہ $6 + 5 = 11$

(ii) میں $a = 20$ کیونکہ $20 - 6 = 14$

(iii) میں ....$a = 2, 3, 4$ کیونکہ $2 + 2 > 3$

(iv) میں $a = 6$ کیونکہ $6 \times 3 = 18$

(v) میں $a = 0$ کیونکہ $0 + 7 < 9$

مشق نمبر 7.8

(1) مندرجہ ذیل جملوں میں سے مساواتیں اور غیر مساواتیں الگ کریں:

(i) $a + 3 = 7$ (ii) $x - 5 < 13$ (iii) $y + 12 = 13$

(iv) $3b + 7 = 2 + b$ (v) $3x > 24$ (vi) $5m - 2 = 21$

(vii) $3x > 24$

(2) صحیح اور غلط کی نشان دہی کیجیے:

(i) $3x + 7 = 16$ ایک متغیر کی مساوات ہے۔

(ii) مساوات $2s + t = 6$ میں ایک متغیر ہے۔

(iii) $2x + 3 = 8$ ایک درجی مساوات ہے۔

(iv) $2x^2 + 3 = 8$ ایک درجی مساوات ہے۔

(v) متغیر کی ایسی قیمت یا قیمتیں جس کے لیے الجبری جملہ درست ہو، اس جملے کا حل سیٹ کہلاتا ہے۔

(3) مندرجہ ذیل جملوں میں a کی قیمت زبانی بتائیں:

(i) $a + 6 = 9$ (ii) $a - 14 = 4$ (iii) $25 - a = 7$

(iv) $3 \times 5 = 3a$ (v) $20 - 5a = 10$

ایک متغیر میں خطی مساوات کو حل کرنا

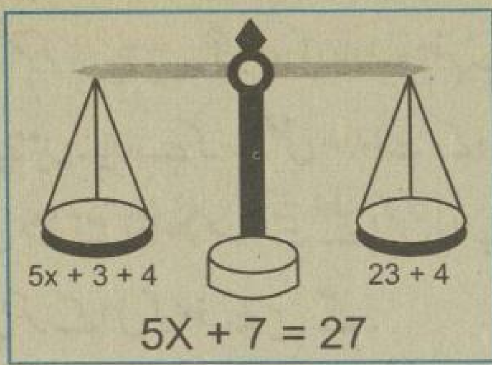
ہم سائنس اور روزمرہ زندگی کے کچھ مسائل الجبرے کی علامات ظاہر کرتے ہوئے حل کر سکتے ہیں۔ خاص طور پر ہم کئی مسائل کو مساوات کی شکل دے کر حل کرتے ہیں۔ مساوات کا حل تلاش کرنا الجبرے کا بہت اہم استعمال ہے۔ مساوات میں ہمیشہ مساوی ہونے کی علامت اور کم از کم ایک متغیر ہوتا ہے۔ اس نامعلوم مقدار یا متغیر کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات کو حل کرتے ہیں

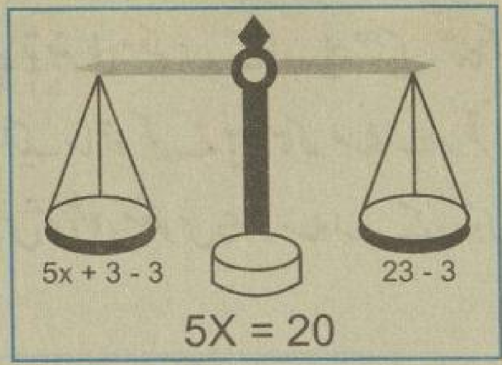
مثال کے طور پر $5x + 3 = 23$

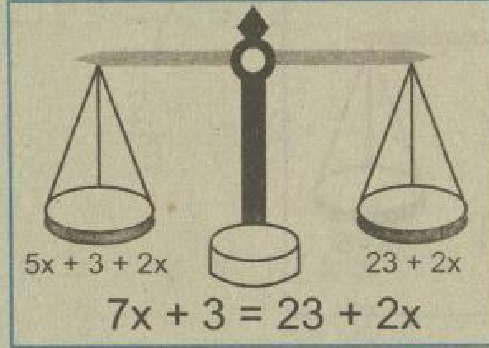
ایک مساوات ہے۔ x کی وہ قیمت جو بائیں طرف کے فقرے کو 23 کے برابر کردے، مساوات کا حل کہلاتی ہے۔ خواہ مساوات کسی قدر پیچیدہ ہوں لیکن ان کو حل کرنے کے لیے باقاعدہ مختلف طریقہ کار استعمال ہوتے ہیں اور ہر مساوات کا حل معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اہم ترکیب یہ ہے کہ متغیر کو مساوی کی علامت کے بائیں طرف لے آئیں اور باقی رقوم علامت کے دائیں طرف رکھیں۔ اس طرح سے متغیر کی قیمت معلوم ہو جائے گی۔

مساوات کو متوازن بنانا

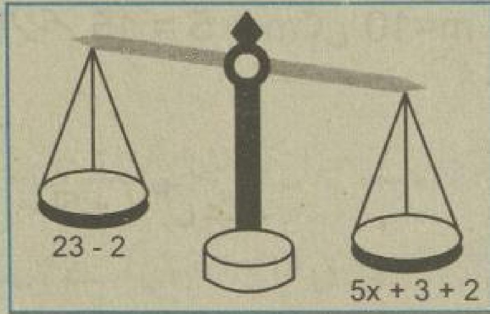
مساوات کا تصور بہتر طور پر سمجھنے کے لئے آیئے! ہم ترازو کا استعمال کرتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ ترازو کے دونوں پلڑوں کی مقداریں ایک دوسرے کے ساتھ متوازن ہیں۔ ہم مساوات $5x + 3 = 23$ کو زیرِ غور لاتے ہیں۔ $5x + 3$ ترازو کے بائیں پلڑے میں ہے اور 23 دائیں طرف۔ پلڑوں میں توازن برقرار رکھنے کے لئے ہم جو عمل بائیں طرف کرتے ہیں، وہی عمل ہمیں دائیں طرف بھی کرنا ہوتا ہے۔ یعنی اگر ہم دونوں پلڑوں میں یکساں حسابی عمل (+، -، x یا ÷) کریں تو پلڑوں کے توازن میں کوئی فرق نہیں آئے گا۔ مندرجہ ذیل سب صورتوں میں ترازو کے پلڑے متوازن ہیں:

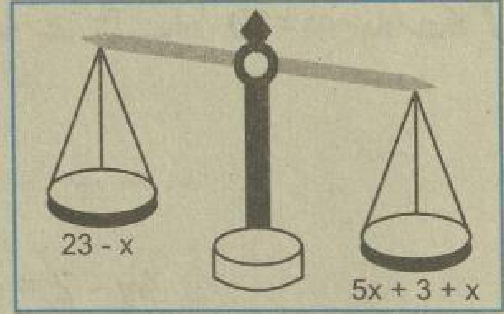






مندرجہ ذیل صورتوں میں پلڑے متوازن نہیں ہیں۔





آخری دو صورتوں میں ہم دائیں پلڑوں میں 2 اور x جمع کر رہے ہیں اور بائیں پلڑوں میں ان مقداروں کو تفریق کر رہے ہیں جس سے توازن بر قرار نہیں رہتا۔ پس

مساوات کے دونوں فقروں میں ایک ہی عدد کو جمع یا تفریق کرنے سے مساوات قائم رہتی ہے۔

توازن قائم رکھنے کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے آیئے اب ہم کچھ مساوات کی مثالیں حل کرتے ہیں۔

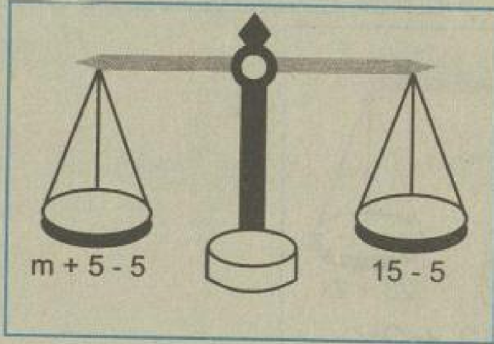
مثال 1:

حل: $m + 5 = 15$ کو حل کیجئے۔

$$m + 5 = 15$$

کسی مساوات میں متغیر کا صحیح مقام مساوات کے بائیں جانب ہے اور مستقل کا صحیح مقام دائیں جانب ہوتا ہے۔ پس جو چیزیں اپنے مقام پر نہ ہوں ان کو (اگر ان کی علامت جمع یا تفریق ہے) جمعی معکوس کے ذریعے

صفر بنا کر ختم کر دیتے ہیں۔ اگر ان کی علامت ضرب یا تقسیم ہے تو ضربی معکوس کے ذریعے "ایک" بنا کر ختم کر دیتے ہیں۔ یاد رہے کہ یہ عمل مساوات کے دونوں جانب ایک ساتھ کرتے ہیں تاکہ مساوات برقرار رہے۔ اس مثال میں 5+ (مساوات کے بائیں جانب ہے) میں اس کا جمعی معکوس 5- (مساوات کے دونوں جانب) جمع کر کے اس کو صفر بنا دیں گے۔



$$m + 5 - 5 = 15 - 5$$

یا $m + 0 = 10$

$$m = 10$$

پس $\{10\}$ = حل سیٹ

پڑتال۔ اگر ہم $m + 5 = 15$ میں $m = 10$ رکھیں تو مساوات صحیح ہے اور $m = 10$ مساوات کا حل سیٹ ہے۔

مثال 2: مساوات کو حل کیجئے۔

$$4y - 2 = 2y + 10$$

حل:

$$4y - 2 = 2y + 10$$

اطراف سے 2y تفریق کیجئے۔

$$4y - 2 - 2y = 2y + 10 - 2y$$

یا $2y - 2 = 10$

اب اطراف میں 2 جمع کیجئے۔

$$2y - 2 + 2 = 10 + 2$$

$$2y = 12$$

اب مساوات کے بائیں جانب y کے ساتھ جو 2 رہ گیا ہے اس کو اس کے ضربی معکوس $\frac{1}{2}$ سے (دونوں جانب) ضرب دے کر "ایک" بنا دیں۔

پس $\frac{1}{2} \times 2y = \frac{1}{2} \times 12$ یا

$y = 6$ یا {6} مساوات کا حل سیٹ ہے۔

مثال 3: $\frac{2y}{3} = 12$ کو y کے لیے حل کیجئے۔

حل: $\frac{2y}{3} = 12$

$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times y = 12 \times \frac{3}{2}$ (اطراف کو $\frac{3}{2}$ سے ضرب دی)

$y = 18$

پس {18} مساوات کا حل سیٹ ہے۔

پس مساوات کا حل معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات میں توازن کے اصول کو استعمال کرتے ہیں۔ ہم عام طور پر حل معلوم کرنے کے لیے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے بنیادی عوامل استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4:

$3x + 2 = 8$

حل: $3x + 2 = 8$

اطراف سے 2 تفریق کیا $3x + 2 - 2 - = 8 - 2$

یا $3x = 6$

اطراف کو 3 سے تقسیم کیا $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$

$x = 2$

پس حل سیٹ $= \{2\}$

پڑتال: x کی قیمت درج کرنے سے $3(2)+2=6+2=8$

مثال 5: حل کیجئے۔

$$\frac{2}{3}a - 1 = 5$$

حل۔

$$\frac{2}{3}a - 1 = 5$$

اطراف میں 1 جمع کیا

$$\frac{2}{3}a - 1 + 1 = 5 + 1$$

$$\frac{2}{3}a = 6$$

اطراف کو $\frac{3}{2}$ سے ضرب دی

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}a = 6 \times \frac{3}{2}$$

پس $a = 9$ $\{9\}$ = حل سیٹ

پڑتال: (a کی قیمت 9 درج کی)

$$\frac{2}{3} \times 9 - 1 = 5$$

$$2 \times 3 - 1 = 5$$

$$6 - 1 = 5$$

$$= 5$$

مثال 6: حل کریں۔

$$5(a-2) - (3a-7) = a + 3$$

حل:

$$5(a-2) - (3a-7) = a + 3$$ یا

$$5a - 10 - 3a + 7 = a + 3$$

$$2a - 3 = a + 3$$ یا

اطراف سے a تفریق کیا

$$2a - 3 - a = a + 3 - a$$ یا

$$a - 3 = 3$$

اطراف میں 3 جمع کیا

$$a - 3 + 3 = 3 + 3$$ یا

$a = 6$ پس $\{6\}$ = حل سیٹ

پڑتال۔ a کی قیمت درج کرنے سے

$$5(6-2) - (3 \times 6 - 7) = 6 + 3$$

$$5(4) - (18 - 7) = 9$$

$$20 - 11 = 9$$

$$9 = 9$$

بائیں طرف = دائیں طرف

مثال7: مساوات کو حل کریں۔

$$2\frac{2}{5}y - \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}y + 10\frac{2}{5}$$

حل:

$$2\frac{2}{5}y - \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}y + 10\frac{2}{5}$$

یا $\frac{12}{5}y - \frac{2}{5} = \frac{6}{5}y + \frac{52}{5}$

(اطراف سے $\frac{6}{5}y$ تفریق کیا)

یا $\frac{12}{5}y - \frac{2}{5} - \frac{6}{5}y = \frac{6}{5}y + \frac{52}{5} - \frac{6}{5}y$

$$\frac{12}{5}y - \frac{6}{5}y - \frac{2}{5} = \frac{52}{5}$$

(اطراف میں $\frac{2}{5}$ جمع کیا)

$$\frac{6}{5}y - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{52}{5} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{6}{5}y = \frac{54}{5}$$

(اطراف کو $\frac{5}{6}$ سے ضرب دی)

$$\frac{6}{5} \times \frac{5}{6}y = \frac{54}{5} \times \frac{5}{6}$$

$$y = 9$$

پڑتال:

$$2\frac{2}{5}y - \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}y + 10\frac{2}{5}$$

$y = 9$ قیمت درج کرنے سے

$$2\frac{2}{5}(9) - \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}(9) + 10\frac{2}{5}$$

$$\frac{12(9)}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{5}(9) + \frac{52}{5}$$

$$\frac{108}{5} - \frac{2}{5} = \frac{54}{5} + \frac{52}{5}$$

$$\frac{108-2}{5} = \frac{54+52}{5}$$

$$\frac{106}{5} = \frac{106}{5}$$

بائیں طرف = دائیں طرف

مشق نمبر 7.9

مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کیجئے:

(1) $4x + 1 = 3x + 5$

(2) $3x - 5 = x + 7$

(3) $\frac{y + 1}{5} = 7$

(4) $\frac{6y - 7}{2} = 7$

(5) $4x - 3 = 6x - 9$

(6) $3(2x - 1) + 4(2x + 5) = 45$

(7) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

(8) $3x + \frac{3}{8} = 2x + \frac{2}{3}x$

(9) $\frac{x + 3}{2} = \frac{x - 3}{3}$

(10) $\frac{x + 3}{5} - \frac{2x + 1}{4} = 2$

سرگرمی

اپنے دوست سے کہئے کہ وہ ایک عدد سوچے۔ اس میں تین جمع کرنے کے بعد 2 سے ضرب دے۔ اب اس عدد میں سے 6 کو تفریق کرے اور حاصل ہونے والے عدد کو 2 سے تقسیم کرے۔ کیا اس کے پاس وہی عدد آیا جو اس نے سوچا تھا؟ آپ دریافت کریں۔

الجبری مسائل میں خطی اور ایک متغیر والی مساوات کے عبارتی سوالات

یہ ضروری ہے کہ ہم معلومات کو علامات کے ذریعے الجبری جملوں میں بیان کرنا سیکھیں۔ مندرجہ ذیل مثالوں سے یہ بات واضح ہو گی:

مثال1: کسی عدد میں 6 جمع کریں تو 9 آتا ہے۔ عدد بتائیں

حل: $x =$ فرض کیا مطلوبہ عدد۔

عدد میں 6 جمع کرنے سے $= x + 6$

لیکن دیا ہوا مجموعہ $= 9$

یا $x + 6 = 9$

$x + 6 - 6 = 9 - 6$

$x = 3$

پس مطلوبہ عدد 3 ہے۔

مثال2: کسی عدد کے دوگنے میں 6 جمع کرنے پر حاصل جمع 24 ہوتا ہے۔ عدد بتایئے۔

حل: $x =$ فرض کیا مطلوبہ عدد

عدد کا دگنا $= 2x$

دگنے میں 6 جمع کرنے سے $= 2x + 6$

لیکن دیا ہوا مجموعہ $= 24$

پس $2x + 6 = 24$

$2x + 6 - 6 = 24 - 6$

یا $2x = 18$

$x = 9$ پس مطلوبہ عدد 9 ہے۔

مثال3: میں ایک عدد سوچتی ہوں۔ اس عدد میں سے 8 تفریق کرنے کے بعد اسے 3 سے ضرب دیتی ہوں۔ میرے پاس جواب 21 آتا ہے۔ بتایئے کہ میں نے کون سا عدد سوچا تھا۔

حل:

$x =$ فرض کیا سوچا ہوا عدد

عدد میں 8 تفریق کرنے سے $= x - 8$

3 سے ضرب دینے پر $= 3(x - 8)$

دیا ہوا حاصل ضرب $= 21$

سوال کی شرط کے مطابق $3(x - 8) = 21$

یا $\frac{3(x - 8)}{3} = \frac{21}{3}$

$x - 8 = 7$

$x - 8 + 8 = 7 + 8 = 15$

پس مطلوبہ عدد 15 ہے۔

مثال 4: ایک مستطیل کا احاطہ 56 سم ہے اگر دو متصل ضلعوں میں ایک ضلع دوسرے ضلع سے 4 سم بڑا ہو تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بتائیے۔



حل: فرض کیا

مستطیل کی چوڑائی = x سم

مستطیل کی لمبائی = $(x + 4)$ سم

احاطہ = $2 (x + x + 4)$

$= 2 (2x + 4)$

دیا ہوا احاطہ = 56 سم

سوال کی شرط کے مطابق $2 (2x + 4) = 56$

$\frac{2 (2x + 4)}{2} = \frac{56}{2}$

$2x + 4 = 28$

$2x + 4 - 4 = 28 - 4$

$2x = 24$

$x = 12$

پس مستطیل کی چوڑائی سم = 4 + 12 برابر 16 سم ہے۔

مستطیل کی چوڑائی = $x = 12$ سم

مستطیل کی لمبائی = $x+4 = 12+4 = 16$ سم

مشق نمبر 7.10

1. کسی عدد کے تین گنا میں 7 جمع کریں تو جواب 22 آتا ہے۔ عدد بتائیے۔

2. ایک عدد کا ایک تہائی اور ایک چوتھائی جمع کریں تو مجموعہ 14 آتا ہے۔ وہ عدد بتائیے۔

3. دو ایسے مسلسل اعداد بتائیے جن کا مجموعہ 43 ہے۔

4. ایک کمرے کی لمبائی اس کی چوڑائی سے 1.5 میٹر زیادہ ہے۔ اگر کمرے کا احاطہ 63 میٹر ہو تو کمرے کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔

5. دو اعداد کا مجموعہ 9 ہے۔ پہلے عدد کے 5 گنا اور دوسرے عدد کے 4 گنا میں 9 کا فرق ہے۔ اعداد بتائیں

6. ایک مثلث ABC کا احاطہ 103 سم ہے۔ ضلع AB اور ضلع BC میں 10 سم کا فرق ہے اور ضلع AC اور ضلع BC میں 3 سم کا فرق ہے۔ ہر ضلعے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7. تین ایسے مسلسل مکمل اعداد بتائیے جن کا مجموعہ 48 ہے۔

8. چار سلسلے وار آنے والے طاق اعداد کا مجموعہ 120 ہے۔ اعداد بتائیے۔

9. ایک 32 سم لمبے تار کو موڑ کر ایک مربع بنایا گیا۔ بتائیے کہ مربع کے ہر ضلع کی لمبائی کتنی ہوگی۔

10. حسن اور اصغر کے پاس کل 80 ماربل تھے۔ حسن کے پاس اصغر سے چار گنا زیادہ ماربل تھے۔ بتائیے حسن اور اصغر کے پاس علیحدہ علیحدہ کتنے ماربل ہوں گے۔

مشق نمبر 7.11

1. مساوات کا حل متغیر کے لیے معلوم کریں:

(i) $m + 19 = 10$ (ii) $5 - 5a = 10$ (iii) $9b - 1 = 17$

(iv) $\frac{2x-1}{7} = 3$ (v) $-17e = 51$ (vi) $\frac{-y+3}{2} = 1$

② مندرجہ ذیل مساوتوں کا حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $\frac{x}{2} - 5 = 12$

(ii) $3a + 8 = 17$ (iii) $\frac{2}{9}m + 1 = 1\frac{1}{2}$

③ نورین اور کامران کے پاس کل 300روپے ہیں۔اگر نورین کے پاس کامران سے دگنے روپے ہوں تو دونوں کا حصہ بتائیے۔

باب نمبر 8 معلومات داری

تمہید و اعادہ

معلومات داری ایک نیا عنوان ہے۔ اس کا یہ نام مڈل سطح کے نئے نصاب سے شروع کیا جا رہا ہے لیکن یہ نہ سوچیئے کہ یہ کوئی نیا علم ہے۔ یہ عنوان دراصل شماریات (Statistics) کے مضمون کا ایک حصہ ہے۔ پچھلی چند صدیوں سے اس مضمون میں مستقل اضافہ ہو رہا ہے اور اس مضمون کی تعریف بھی بدل رہی ہے۔ یوں سمجھ لیجئے کہ اس مضمون کا آغاز اس طرح ہوا کہ قدیم زمانے میں بادشاہ اس بات کے خواہشمند ہوتے تھے کہ انہیں کسی طرح یہ معلوم ہو سکے کہ ان کی سلطنت میں کتنی افرادی قوت دستیاب ہے۔ اس کے لئے وہ باقاعدہ مردم شماری کراتے اور اس طرح سے وہ اپنی طاقت اور جنگ کرنے کی صلاحیت کے متعلق معلومات سے آگاہی رکھتے تھے۔ اسی وجہ سے شماریات کو لوگ بادشاہوں کی سائنس اور سیاست کا حساب کہنے لگے۔ کچھ عرصے بعد شماریات کی تعریف اس طرح کی گئی کہ یہ گنتی کی سائنس ہے۔ جب شماریات افراد اور چیزوں کی گنتی کرنے سے آگے نکل گئی تو اسے اندازوں اور قیاس آرائی کی سائنس کہا گیا۔ لیکن آج ہم اس کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ شماریات ان اصولوں اور طریقوں کا مطالعہ ہے جو معلومات جمع کرنے، تجزیہ کرنے اور پیش کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔ اس کے بعد کسی بھی تحقیقی میدان کے متعلق عددی معلومات سے نتائج اخذ کرتے ہیں اور اس طرح سے علوم آگے بڑھتے ہیں۔

آپ کے لئے بھی معلومات داری (Information Handling) نیا عنوان نہیں ہے۔ آپ چھٹی جماعت میں اس کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ آپ نے سیکھا تھا کہ کوائف (Data) کس طرح جمع کرتے ہیں اور کن اصولوں کے تحت ان کی تنظیم کرتے ہیں۔ دی ہوئی معلومات سے بار گراف اور پائی چارٹ کی کس طرح تشکیل کرتے ہیں اور ان ذرائع سے معلومات کا مقابلہ کرنا کس قدر آسان ہوتا ہے۔ آپ نے خطی (Line) گراف پڑھنا اور اس سے نتائج اخذ کرنا بھی سیکھا تھا۔

اس باب میں آپ اوپر دیئے ہوئے تمام تصورات کا اعادہ کریں گے اور اس کے ساتھ ساتھ ان تصورات کو زیادہ گہرائی کے ساتھ سیکھیں گے۔

کوائف جمع کرنا اور ان کو ترتیب دینا

ہم اعداد و شمار کی دنیا میں بستے ہیں۔ درج ذیل جملوں کا مطالعہ کیجئے۔

پاکستان کی آبادی 136 ملین ہے۔

آج کل ٹماٹر کی قیمت 35 روپے فی کلو ہے۔

میٹرک کے امتحان میں نتیجہ 80 فیصد رہا۔

میری جماعت کے بچوں کا اوسط وزن 40 کلوگرام ہے۔

ہم اسی قسم کے اور بھی بہت سے جملے لکھ سکتے ہیں۔ اس قسم کی معلومات کس طرح جمع کی جا سکتی ہیں اور اس کا اظہار کس طرح کریں کہ پڑھنے والا با آسانی سمجھ جائے؟ عددی کوائف ہم کئی طریقوں سے جمع کر سکتے ہیں۔ ان جمع شدہ کوائف کے مختصر اور آسان فہم اظہار کے لئے جدول، چارٹ اور گراف بناتے ہیں۔ آیئے! کوائف جمع کرنے کے کچھ آسان طریقوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

کوائف جمع کرنا

فرض کیجئے کہ سکول کے استاد ندیم صاحب یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان کی جماعت کے 50 طلبہ کن کھیلوں کو پسند کرتے ہیں۔ وہ جماعت میں طلبہ سے کہتے ہیں "میں کھیل کا نام لوں گا، جن طلبہ کو وہ کھیل پسند ہو، وہ اپنا ہاتھ کھڑا کر دیں"۔ ندیم صاحب ہر کھیل کے لئے اٹھے ہوئے ہاتھوں کو گن لیں گے۔ انہوں نے طلبہ سے یہ بھی کہا تھا کہ ایک طالب علم صرف ایک کھیل کے لئے ہاتھ کھڑا کرے گا۔ جب ہاتھوں کی گنتی ختم ہوئی تو جو نتیجے کا جدول (جمع کی ہوئی معلومات یا کوائف) موصول ہوئے وہ اس طرح تھے:

پسندیدہ کھیل	کرکٹ	ہاکی	کبڈی	والی بال	گلی ڈنڈا
طلبہ کی تعداد	26	3	8	7	6

اب آپ فرض کیجئے کہ ندیم صاحب کے سکول کے ہیڈ ماسٹر صاحب چاہتے ہیں کہ وہ کھیلوں کے لئے سکول کا بجٹ تیار کریں، لہذا بہتر بجٹ بنانے کے لئے وہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ کون سا کھیل کس تعداد میں بچے سکول میں کھیلنا پسند کرتے ہیں۔ وہ محمد علی صاحب سے کہتے ہیں کہ وہ ایک سروے کریں اور ہر طالب علم کو نیچے دیئے ہوئے سوال نامے کی ایک کاپی دیں تاکہ تمام سکول کے لئے معلومات جمع ہو جائیں:

سوال نامہ

سکول میں کھیلے جانے والے کھیل کی پسندیدگی

آپکا پسندیدہ کھیل کون سا ہے ؟

جو کھیل آپ کو پسند ہے، اس کے سامنے دیئے ہوئے باکس میں (x) لگائیے:

صرف ایک کھیل کا انتخاب کیجئے

کرکٹ	☐	ہاکی	☐
کبڈی	☐	والی بال	☐
گلی ڈنڈا	☐		

محمد علی صاحب نتیجے کا درج ذیل جدول تیار کرتے ہیں:

طلبہ کی تعداد	پسندیدہ کھیل
460	کرکٹ
80	ہاکی
50	کبڈی
110	والی بال
60	گلی ڈنڈا
760	میزان

آپ نے دیکھا کہ ہم معلومات دو طریقوں سے جمع کرتے ہیں۔ ایک زبانی پوچھ کر اور دوسرے سوالنامے کے ذریعے۔ ایک تیسری صورت اور بھی ہے۔ اگر جواب دینے والوں کی زیادہ تعداد ان پڑھ ہے اور وہ سوالنامہ کو نہیں پڑھ سکتی تو اس صورت میں معلومات جمع کرنے کے لئے کوئی ایک شخص مقرر کیا جاتا ہے۔ یہ شخص ان پڑھ لوگوں سے پوچھ کر جواب سوال نامے میں درج کرتا ہے اور اس طرح سے یہ شخص سوالنامہ کو مکمل کر لیتا ہے۔

کوائف کو ترتیب دینا

جب آپ انٹرویو یا سوالنامے کے ذریعے سے کوائف جمع کر لیتے ہیں تو ان کو ترتیب دیا جاتا ہے۔ کوائف کو مختلف زُمروں میں جمع کیا جا سکتا ہے، پھر یہ گنا جاتا ہے کہ ہر زمرے میں کتنی تعداد ہے۔ اس کے لئے بہتر ہے کہ کوائف کو ترتیب کے ساتھ جمع کیا جائے۔

عام طور پر کوائف ترتیب دینے کے دو طریقے ہیں۔

پہلا طریقہ یہ ہے کہ آپ منتخب کی جانے والی چیزوں اور اعداد کی بنی ہوئی فہرست اپنے ساتھ رکھیں اور انتخاب پر باری باری اعداد کو کاٹتے چلے جائیں۔ فرض کیجئے کہ آپ یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ لوگوں کا پسندیدہ رنگ کون سا ہے:

سرخ	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	9	10
نیلا	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	7	8	9	10
سبز	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
پیلا	~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	5	6	7	8	9	10

اس طریقے میں دِقت یہ ہے کہ اگر منتخب کی جانے والی چیزیں زیادہ ہوں یا لوگوں کی تعداد زیادہ ہو تو یہ طریقہ بہت طویل ہو جاتا ہے۔ دوسرا طریقہ ٹیلی (Tally) کا ہے۔ اس میں ایک چھوٹا سا عمودی خط منتخب کی جانے والی چیز کے سامنے لگاتے ہیں۔ چار عمودی خطوط کے بعد پانچواں خط افقی اس طرح کھینچتے ہیں کہ وہ عمودی خطوط کو کاٹ دے۔ پانچ پانچ کے گروپ آسانی سے گنے جا سکتے ہیں۔

سرخ	~~IIII~~	II
نیلا	~~IIII~~	
سبز	~~IIII~~	~~IIII~~
پیلا	III	

معلومات جمع کرنے میں ہم ہمیشہ یہ گنتے ہیں کہ کوئی چیز کتنی مرتبہ ہوئی اور اس کی تعداد کتنی ہے۔ کوائف کو ٹیلی کے ذریعے پیش کرتے ہوئے ہم تعداد (Frequency) یعنی جتنی بار وہ چیز واقع ہوئی، اس کے سامنے لکھتے ہیں۔

رنگ	ٹیلی کے نشان	تعداد
سرخ	~~IIII~~ II	7
نیلا	~~IIII~~	5
سبز	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
پیلا	III	3

معلومات جمع کرتے ہوئے اس بات کا خیال رکھیں کہ ٹیلی کا طریقہ معلومات جمع کرتے ہوئے بھی استعمال ہوتا ہے اور اس کو معلومات جمع کرنے کے بعد کوائف ترتیب دینے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

بہتر ہوگا کہ آپ پہلے اس سرگرمی کے لئے جماعت میں مباحثہ کریں۔ اس کے بعد جماعت کو چھوٹے گروپوں میں تقسیم کریں۔

سرگرمی: اپنے سکول کے لئے سروے کا ایک نمونہ تشکیل دیجئے۔ اس سروے کے لئے ایک سوال نامہ تیار کیجئے جس میں کم از کم 5 سوال ہوں۔ ایسے سوالوں کا انتخاب کیجئے جو آپ کے خیال سے دل چسپ اور آسان ہیں۔ مثلاً "آپ کا پسندیدہ رنگ کون سا ہے؟" "آپ کے کتنے بہن بھائی ہیں"؟ "آپ کو کون سا مضمون پسند ہے؟" وغیرہ ہر گروپ یہ مقرّر کرے کہ وہ کونسی جماعت میں سروے کے لئے جائے گا اور مناسب تعداد میں سوال نامے کی کاپیاں تیار کرائیں۔ سروے مکمل کرنے کے بعد اپنے نتائج کو ترتیب دیں۔

پائی گراف (PIE-GRAPH)

اس گراف کے ذریعے اعداد وشمار کو ایک دائرے کے مختلف قطعات یعنی سیکٹر (Sector) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس گراف میں اس خصوصیت کو استعمال کرتے ہیں کہ دائرے کے قطعات مرکز پر جو زاویے بناتے ہیں ان کا مجموعہ 360° درجے ہوتا ہے۔ اس گراف کو بنانے کے لیے مندرجہ ذیل امور کا خیال رکھا جاتا ہے۔

1. تمام اعداد وشمار کا مجموعہ معلوم ہونا۔
2. ایک مناسب رداس کا دائرہ۔ جو اس جگہ کے لیے مناسب ہو جتنی جگہ میں گراف بنانا ہے۔

(3) مختلف اعداد و شمار کو سامنے رکھتے ہوئے دائرے کو سیکٹروں (قطعات) میں اس طرح تقسیم کرنا کہ مختلف اعداد و شمار واضح طور پر پیش ہوں اور ان کا تناسب قائم رہے۔ یعنی اسی نسبت سے مرکز پر مختلف زاویے بنانا۔



نوٹ : سامنے دی گئی شکل میں سایہ دار حصہ دائرے کا ایک سیکٹر ہے۔

مثال 1 ایک خاندان کا ماہانہ خرچ مندرجہ ذیل گوشوارے میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو پائی گراف (PIE-GRAPH) سے ظاہر کریں۔

خوراک	180 روپے
لباس	90 روپے
کرایہ مکان	90 روپے

حل :

اخراجات	خرچ روپوں میں
خوراک	180
لباس	90
کرایہ مکان	90
کل خرچ	**360**

یہاں ہم نے 360 روپوں کو دائرہ کے قطعات سے ظاہر کرنا ہے۔

خوراک پر خرچ ہونے والے روپے کو ظاہر کرنے والے سیکٹر کے زاویے کی مقدار

$$360 \times \frac{180}{360} = 180^\circ$$

یعنی دائرے کا وہ حصہ (سیکٹر) جو دور داسی قطعات کو مرکز سے ملاتا ہے اس سیکٹر پر 180° کا زاویہ بنتا ہے۔

اسی طرح لباس پر خرچ ہونے والی رقم کو ظاہر کرنے والے سیکٹر کے زاویے کی مقدار

$$360 \times \frac{90}{360} = 90^\circ$$

کرایہ مکان بھی اسی کے برابر ہے۔ اس لیے مکان کے کرایہ پر خرچ ہونے والی رقم ظاہر کرنے والے سیکٹر کے زاویے کی مقدار $= 90^\circ$

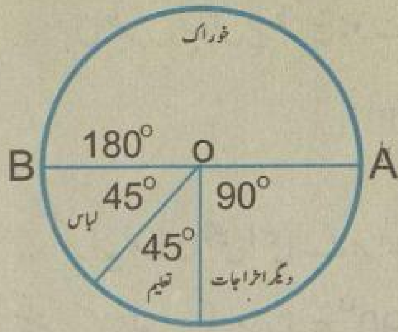
کل مجموعہ $= 180^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کو پائی گراف سے ظاہر کریں۔

اخراجات	خرچ
خوراک	800 روپے
لباس	200 روپے
تعلیم	200 روپے
باقی اخراجات	400 روپے

حل: کل اخراجات = 1600 روپے

اخراجات	خرچ روپوں میں	مرکزی زاویہ درجوں میں
خوراک	800	$\overset{180}{\cancel{360}} \times \frac{\cancel{800}}{\underset{2}{\cancel{1600}}} = 180^\circ$
لباس	200	$\overset{45}{\cancel{360}} \times \frac{\cancel{200}}{\underset{8}{\cancel{1600}}} = 45^\circ$
تعلیم	200	$\overset{45}{\cancel{360}} \times \frac{\cancel{200}}{\underset{8}{\cancel{1600}}} = 45^\circ$
دیگر اخراجات	400	$\overset{90}{\cancel{360}} \times \frac{\cancel{400}}{\underset{4}{\cancel{1600}}} = 90^\circ$
میزان	1600	360°



"O" کو مرکز مان کر کسی رداس کا دائرہ کھنچا۔ پروٹریکٹر کی مدد سے بالترتیب 180° ,45° ,45° ,90° مقداروں کے زاویے بنا کر دائرے کو خوراک، لباس، تعلیم اور دیگر اخراجات کو ظاہر کرنے والے سیکٹروں میں بانٹ دیا۔
پس سامنے کی شکل پائی گراف کو ظاہر کر رہی ہے۔

مشق نمبر 8.1

(1) ایک تحقیقاتی فارم پر فصل کی پیداوار کو مندرجہ ذیل گوشوارے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کو پائی گراف سے ظاہر کریں۔

فصل	رقبہ جس پر کاشت کی گئی
گندم	800 ایکڑ
چنا	200 ایکڑ
جو	40 ایکڑ
دالیں	120 ایکڑ
چارہ	40 ایکڑ

(2) پانچ ضلعوں کی آبادی درج ذیل ہے۔ پائی گراف سے ظاہر کریں۔

ضلع	آبادی
(i)	14 لاکھ
(ii)	10 لاکھ
(iii)	6 لاکھ
(iv)	4 لاکھ
(v)	2 لاکھ

غیر گروہی مواد اور گروہی مواد

غیر گروہی مواد

مقداری مواد ابتدائی معلومات کے ذریعہ حاصل کرنا اور پھر اسے ویسا ہی ریکارڈ کر لینا غیر گروہی مواد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر دسویں جماعت کے فریق (B) کی کرکٹ ٹیم کے چھ کھلاڑیوں نے ایک میچ میں 9, 13, 11, 15, 17, 16 سکور بنایا۔

گروہی مواد

یہ مواد کچھ شماریاتی مراحل سے گزر چکا ہوتا ہے یعنی مواد کو کئی گروہوں، لائنوں یا قطاروں میں اپنی ضرورت کے مطابق ترتیب دے لیں تو اسے گروہی مواد کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 50 طلباء چھٹی جماعت میں داخل ہوئے انہیں اپنی کلاس میں نمبروں کے مطابق یا ان کے نام کے حروف تہجی کے لحاظ سے 5 گروپوں میں درج ذیل طریقہ سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

حاصل کردہ نمبر	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
طلباء کی تعداد	5	18	22	4	1

اس طرح سے لکھے جانے والا مواد گروہی مواد ہے۔

جماعت بندی

جماعت بندی وہ عمل ہے جس میں مواد کو کئی گروہوں یا گروپوں میں ان کی یکساں خصوصیات کی بنا پر ترتیب دے کر لکھا جاتا ہے۔

اصل میں جماعت بندی کے ذریعہ مواد کو جو زیادہ مقدار میں ہوتا ہے، ایک جامع اور آسان شکل میں پیش کیا جاتا ہے تاکہ اس سے باآسانی نتائج اخذ کیے جاسکیں۔

(i) گروہوں یا جماعتوں کی تعداد

خام مواد (Raw data) میں سے کوئی اہم معلومات ضائع کیے بغیر اسے مختصر اور جامع شکل میں پیش کرنے کے لیے چند گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ عام طور پر 15 سے زیادہ گروہوں کی تشکیل

نہیں کی جاتی۔ ویسے تو کوئی سخت لگے بندھے اصول نہیں ہیں تاہم گروہوں کی تعداد 5 اور 15 کے درمیان ہونی چاہیے کیونکہ گروہوں کی بہت کم تعداد اہم معلومات کو ضائع کرتی ہے اور اگر بہت زیادہ گروہوں کو بنایا جائے تو مواد کو مختصر کرنے میں جو زیادہ محنت درکار ہوگی اس کا کوئی فائدہ نہیں ہوتا۔

مثال : نویں جماعت کے 15 طلباء نے ایک امتحان میں ریاضی کے مضمون میں 100 میں سے درج ذیل نمبر حاصل کیے۔

60, 62, 65, 66, 67, 68, 66, 60, 73, 67, 69, 70, 63, 64, 63

مواد کو چند گروہوں میں درج ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

جدول نمبر 1

طلباء کی تعداد (f)	ریاضی کے نمبر
3	60-62
4	63-65
5	66-68
2	69-71
1	72-74
15	کل تعداد

(ii) جماعتوں کو ظاہر کرنا

جماعتوں کو لکھنے کے درحقیقت کئی طریقے ہیں۔ ہر طریقہ قابل قبول ہے۔ صرف جماعتی وقفے کی قدر کو ذہن میں رکھنا چاہیے۔ نمونہ کے طور پر چند طریقے پیش کیے جاتے ہیں۔

I	II	III	IV
1-10	1-9.9	1-9.99	10 سے کم-1
11-20	10-19.9	10-19.99	20 سے کم-10
21-30	20-29.9	20-29.99	30 سے کم-20
31-40	30-39.9	30-39.99	40 سے کم 30
41-50	40-49.9	40-49.99	50 سے کم-40

(iii) جماعتی حدود

ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی

چھوٹی قیمت کو زیریں جماعتی حد (Lower Class Limit) اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد (Upper Class Limit) کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول نمبر-1 میں پہلے گروہ کی زیریں جماعتی حد 60 ہے اور اسی گروہ کی بالائی جماعتی حد 62 ہے اسی طریقہ سے دوسرے گروہ کی زیریں اور بالائی جماعتی حدود 63 اور 65 ہیں۔

(iv) جماعتی وقفہ

جدول نمبر 1 میں' (71-69 ,(68-66) ,65-63) ,(62-60) تمام جماعتی وقفے ہیں۔

جماعتی وقفہ کی جسامت 'وسعت' لمبائی یا مقدار دراصل اس فرق کو کہتے ہیں جو دو متواتر جماعتوں کی زیریں یا بالائی حدود میں پایا جاتا ہے۔ جسے ہم "h" سے ظاہر کرتے ہیں۔ مندرجہ بالا مثال کے جدول نمبر 1 میں "h"3 ہے۔

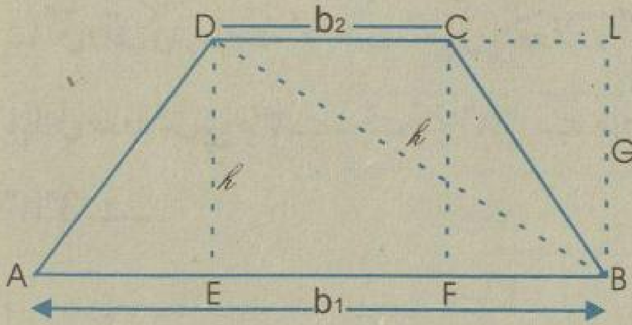
باب نمبر 9 جیومیٹری

ذوزنقہ کا رقبہ
(Area of Trapezium)

ذوزنقہ Trapezium

ایسی چوکور جس کے دو اضلاع متوازی اور دو اضلاع غیر متوازی ہوں ذوزنقہ کہتے ہیں۔

وضاحت:



سامنے دی ہوئی شکل میں ABCD ایک چوکور ہے۔ جس کے اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ متوازی جبکہ $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ غیر متوزی اضلاع ہیں۔

لہٰذا ABCD ایک ذوزنقہ ہے۔

ذوزنقہ کا رقبہ

فرض کریں $m\,\overline{DC} = b_2$ اور $m\,\overline{AB} = b_1$

ذوزنقہ ABCD کا رقبہ = مثلث ABD کا رقبہ + مثلث BDC کا رقبہ

لیکن مثلث ABD کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x قاعدہ x ارتفاع

$= \frac{1}{2} \times AB \times DE$

$= \frac{1}{2} b_1h$

اسی طرح مثلث BCD کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times DC \times BL$

$= \frac{1}{2} \times b_2 \times h$

$= \frac{1}{2} b_2h$

لہذا ذوزنقہ ABCD کا رقبہ $= \frac{1}{2} b_1h + \frac{1}{2} b_2h$

$= \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h$

یعنی

ذوزنقہ ABCD کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ x متوازی اضلاع کا درمیانی فاصلہ

متوازی اضلاع کو ذوزنقہ کے قاعدے اور درمیانی عمودی فاصلہ کو ارتفاع بھی کہتے ہیں۔

ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x دونوں قاعدوں کی مجموعی لمبائی x ارتفاع

مثال1: ایک ذوزنقہ کے قاعدوں کی لمبائی 5 سم اور 7 سم جبکہ ارتفاع 4 سم ہے۔ ذوزنقہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x دونوں قاعدوں کی مجموعی لمبائی x ارتفاع

$= \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) h$

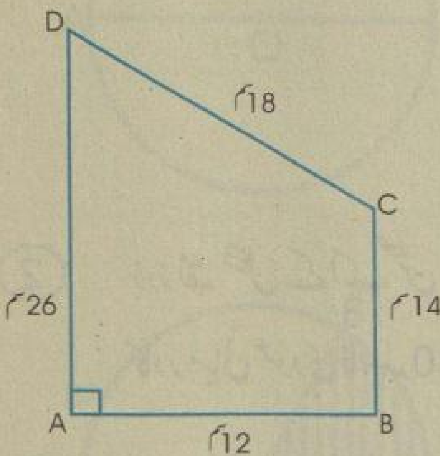
لیکن $b_1 =$ 5 سم ، $b_2 =$ 7 سم ، $h =$ 4 سم

لہذا ذوزنقہ کا رقبہ $= \frac{1}{2} (5+7) (4)$

$= \frac{1}{2} (12) (4)$

= 24 مربع سم

مثال2: دی ہوئی شکل کا رقبہ معلوم کریں



حل: دی ہوئی شکل ذوزنقہ ہے جس میں $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ متوازی اضلاع ہیں جبکہ $\overline{AB}$ ان کا درمیانی عمودی فاصلہ ہے۔

متوازی اضلاع کی لمبائی کا مجموعہ $= m\overline{AD} + m\overline{BC}$

= 26 سم + 14 سم

= 40 سم

درمیانی عمودی فاصلہ $= m\overline{AB}$

= 12 سم

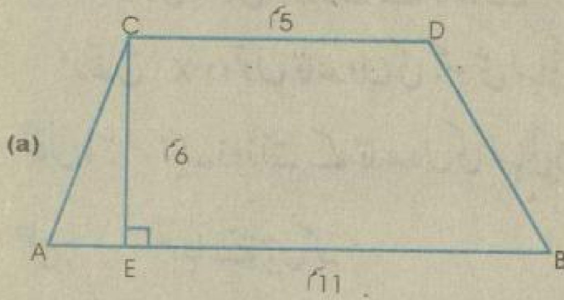
ہم جانتے ہیں کہ

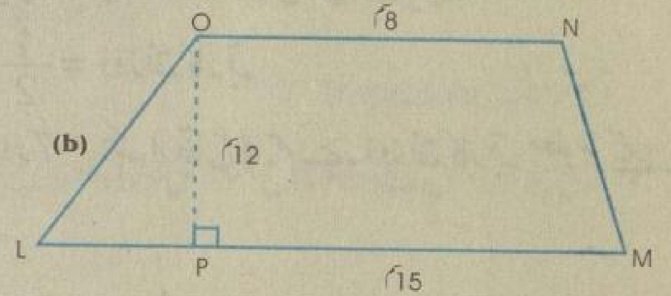
ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ x متوازی اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ x متوازی اضلاع کا درمیانی فاصلہ

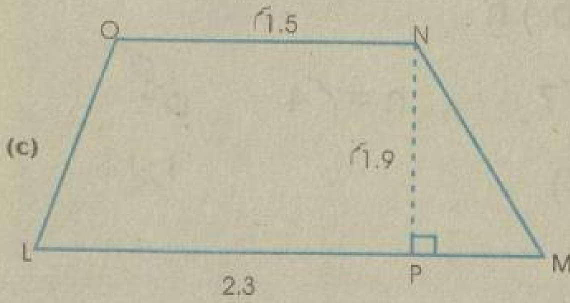
$= \frac{1}{2} \times 40 \times 12 =$ 240 مربع سم

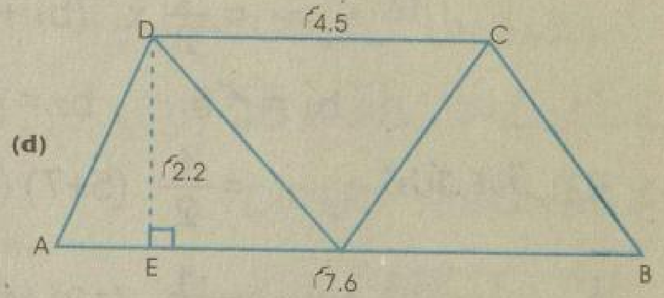
مشق 9.1

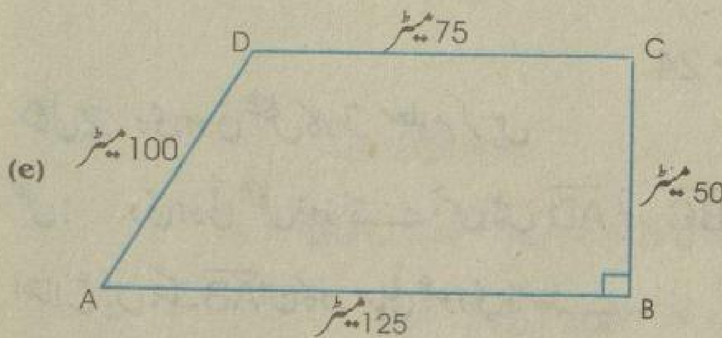
(1) مندرجہ ذیل ذوزنقہ اشکال کا رقبہ معلوم کریں











(2) ذوزنقہ شکل کے ایک صحن کے متوازی اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 15 میٹر اور 25 میٹر ہیں ان کا درمیانی عمودی فاصلہ 10 میٹر ہو تو کھیت کا رقبہ معلوم کیجئے۔

(3) ذوزنقہ شکل کے فرش کے متوازی اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 20 میٹر اور 30 میٹر ہیں ان کا درمیانی عمودی فاصلہ 15 میٹر ہو تو فرش پر قالین بچھانے کا خرچہ بحساب 10 روپے فی مربع میٹر معلوم کیجئے

دائرے کا محیط (Circumference of a circle)

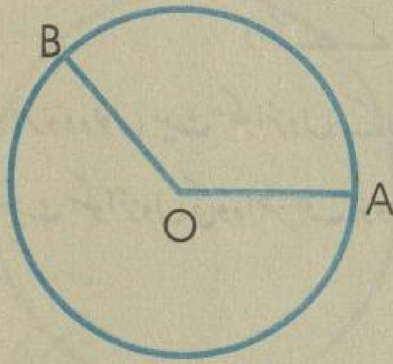
دائرے کے متعلق آپ چھٹی جماعت میں پڑھ چکے ہیں۔ اعادے کیلئے دائرہ کے متعلق چند ایک وضاحتیں یہ ہیں۔

دائرہ

دائرہ نقاط کا سیٹ ہے۔ جس کا ہر نقطہ دیئے ہوئے نقطہ (مرکز) سے یکساں فاصلے پر ہو دائرہ کہلاتا ہے

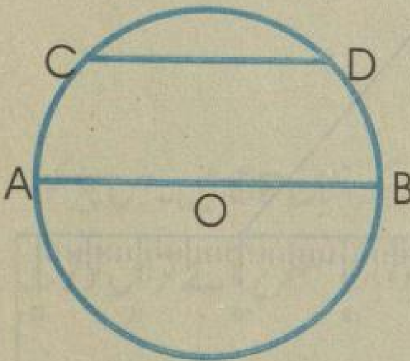
محیط

دائرہ کی پیمائش کو محیط کہتے ہیں۔



نصف قطر یا رداس

وہ خط جو دائرہ کے مرکز کو محیط کے کسی نقطے سے ملائے دائرہ کا نصف قطر یا رداس کہلاتا ہے۔ سامنے دی ہوئی شکل میں خط OA یا خط OB دائرے کے نصف قطر کہلاتے ہیں۔

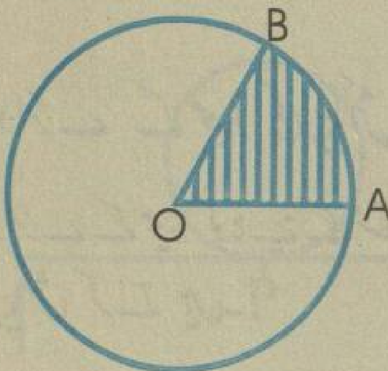


وتر

دائرے کے کوئی سے دو نقاط کو ملانے والا خط دائرے کا وتر کہلاتا ہے۔ سامنے دی ہوئی شکل میں خط CD دائرے کا وتر کہلاتا ہے۔

قطر

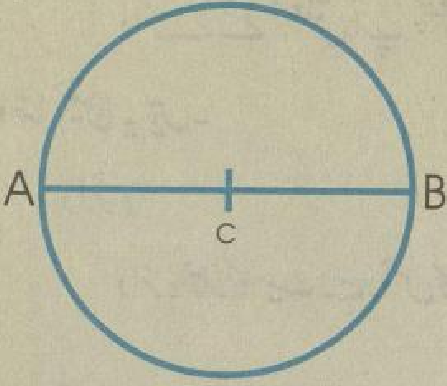
وہ وتر جو دائرے کے مرکز میں سے گزرے دائرے کا قطر کہلاتا ہے۔ دی ہوئی شکل میں خط AB دائرے کا قطر ہے۔



سیکٹر

دائرے کا وہ علاقہ جو ایک قوس اور دو رداسی قطعات کے درمیان واقع ہو۔ دائرے کا سیکٹر کہلاتا ہے۔ سامنے دی ہوئی شکل میں AOB دائرے کا سیکٹر ہے۔

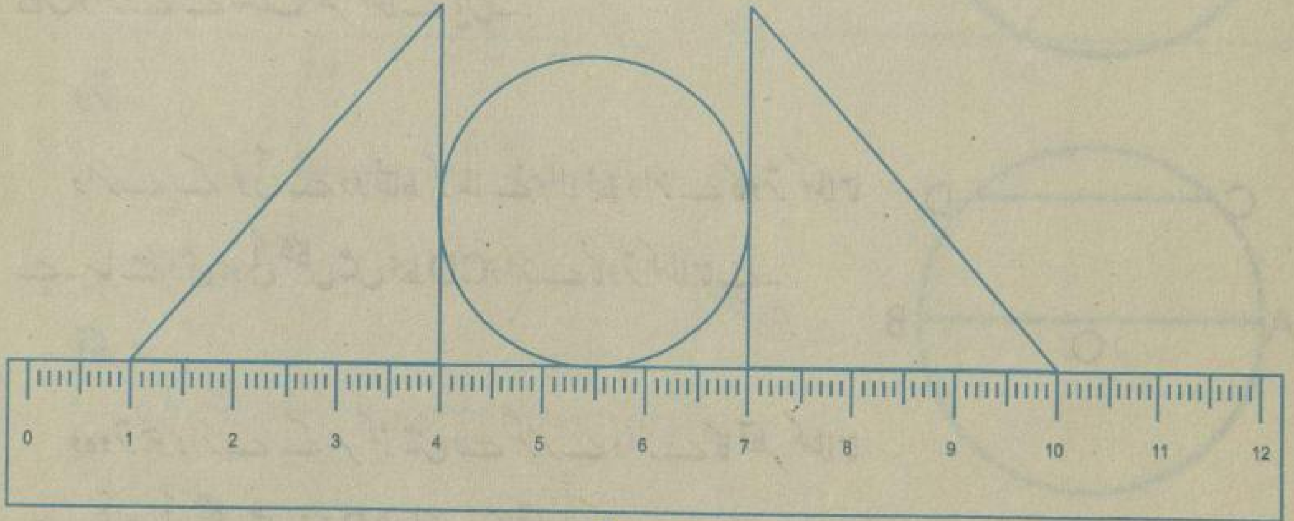
دائرے کے قطر کی پیمائش



سامنے دیئے ہوئے دائرے میں $\overline{AB}$ ایک قطر ہے جو دائرے کے مرکز C سے گذرتا ہے۔ چونکہ قطر ایک قطعہ خط ہوتا ہے۔ اس لیے اس کی پیائش کی جا سکتی ہے۔ اگر دائرے کا مرکز معلوم ہو تو قطر کی پیمائش باآسانی کی جا سکتی ہے۔ اگر مرکز معلوم نہ ہو تو دائرے کے قطر کی پیمائش درج ذیل طریقے سے کریں۔

سرگرمی نمبر 1:

دائرے کے نیچے مسطر رکھیے۔ مسطر کے اوپر سیٹ سکوائروں کو اس طرح رکھیے کہ یہ دائرہ دونوں سیٹ سکوائروں کے درمیان میں آجائے اور ان کے قاعدے مسطر کے ساتھ لگے ہوئے ہوں۔ سیٹ سکوائزوں کی وہ اطراف جو دائرے کو مس کرتی ہیں۔ ان کا درمیانی فاصلہ قطر کی مقدار کے برابر ہو گا۔



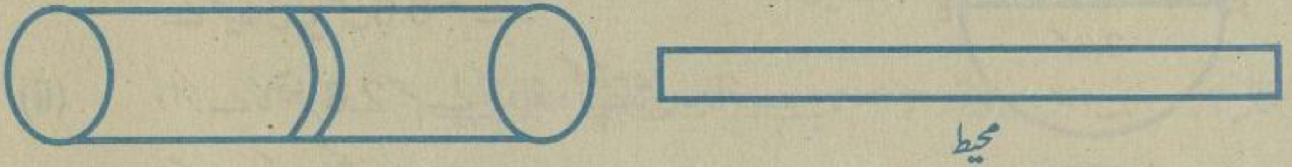
دائرے کا قطر

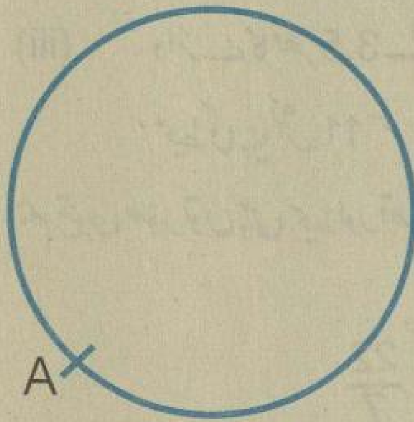
دائرے کے محیط کی پیمائش

دائرے کے محیط کو ناپنے کے مختلف طریقے ہیں۔ آیئے! ہم مختلف سرگرمیوں سے دائرے کے محیط کی پیمائش کرتے ہیں۔

سرگرمی نمبر 2:

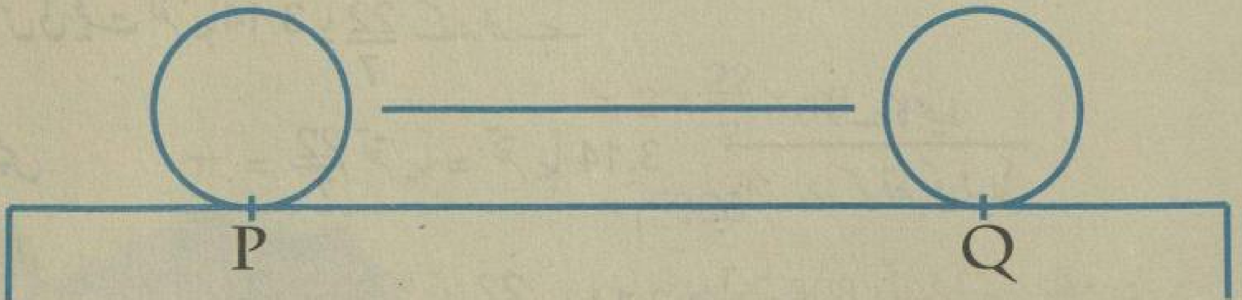
اگر دائرہ کسی بیلن کی دائروی سطح ہے اور ہم اس کا محیط معلوم کرنا چاہتے ہیں تو کاغذ کی ایک پٹی یا دھاگے کو بیلن کے گرد لپیٹ دیجئے۔ جب کاغذ کی پٹی یا دھاگہ پہلے سرے پر پہنچ جائے تو اس جگہ نشان لگا لیں۔ پٹی یا دھاگے کے سرے سے اس نشان تک پیمائش کریں۔ یہ دائرے کا محیط ہے۔



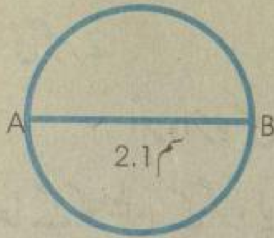


دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم دائرے کے محیط کی پیمائش کے لیے دائرے کے کسی نقطہ A پر پن گاڑ دیتے ہیں۔ ایک گرہ سے دھاگے کو پن سے باندھ دیتے ہیں۔ اب دھاگے کو دائرے کے خط کے ساتھ ساتھ رکھے جاتے ہیں، حتیٰ کہ دھاگہ پن کے مقام پر آجائے۔ اس مقام پر دھاگے پر نشان لگا دیتے ہیں۔ دھاگے کی گرہ سے نشان تک پیمائش کیجیے۔ یہ دائرے کا محیط ہے۔

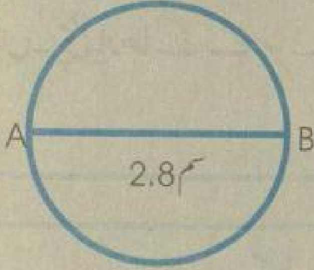
تیسرا طریقہ کسی گول سکے نما چیز کے محیط کو ناپنے کا ہے۔ گول چیز پر ایک جگہ نشان P لگائیں۔ اس چیز کو مسطر پر کسی سم کے نشان پر رکھیں اور چلائیں۔ جب اس چیز کا نشان Q دوبارہ مسطر پر آئے تو اس کو نوٹ کریں۔ یہ فاصلہ $\overline{PQ}$ گول چیز کے محیط کے برابر ہو گا۔



محیط اور قطر کے درمیان نسبت

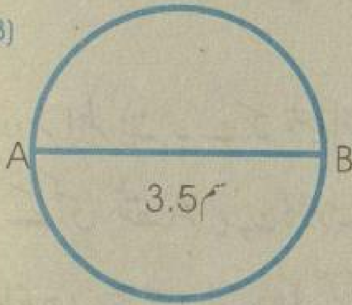


آیئے! ہم چند دائرے کھینچتے ہیں اور ان کے محیط کی پیمائش کرتے ہیں۔



(i) دائرے کا قطر 2.1 سم لے کر دائرہ کھینچتے ہیں۔ دائرے کے محیط کی پیمائش 6.6 سم ہے۔

(ii) دائرے کا قطر 2.8 سم لے کر دائرہ کھینچتے ہیں۔ دائرے کے محیط کی پیمائش 8.8 سم ہے۔



(iii) دائرے کا قطر 3.5 لے کر دائرہ کھینچتے ہیں۔ دائرے کے محیط کی پیمائش 11 سم ہے۔

ہم تینوں صورتوں میں محیط اور قطر کی نسبت معلوم کرتے ہیں۔

(i) میں $\frac{6.6}{2.1} = \frac{66}{21} = \frac{22}{7}$

(ii) میں $\frac{8.8}{2.8} = \frac{88}{28} = \frac{22}{7}$

(iii) میں $\frac{11}{3.5} = \frac{11x10}{35} = \frac{22}{7}$

اگر ہم مختلف رداس کے دائرے لیں اور ان کے محیط معلوم کریں تو ہم دیکھیں گے کہ ہر محیط اور قطر کی نسبت تقریبا یکساں ہے۔ اس نسبت کو π (پائی) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کی قیمت تقریباً 3.14 یا $\frac{22}{7}$ کے برابر ہے۔

پس $\pi = \frac{22}{7}$ تقریباً = تقریباً 3.14 $\frac{\text{دائرے کا محیط}}{\text{دائرے کے قطر کی لمبائی}}$

نوٹ π کی قیمت تقریبا $\frac{22}{7}$ یا 3.14 ہوتی ہے

اس کلیے کو ہم دائرے کا محیط معلوم کرنے کے لیے اس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

دائرے کے قطر کی لمبائی x π = دائرے کا محیط

مثلاً اگر دائرے کے قطر کی لمبائی 2 r ہو تو

دائرے کا محیط = $2\pi r$

جس میں 'r' دائرے کا رداس ہے۔

آیئے اب ہم چند مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال1: ایک دائرے کا قطر 7 سم لمبا ہے۔ دائرے کا محیط معلوم کیجیے۔

حل: دائرے کے قطر کی لمبائی = 7 سم

$$\pi = \frac{22}{7}$$

پس دائرے کا قطر x π = دائرے کا محیط

$$= \frac{22}{7} \times 7$$

= 22 سم

مثال2: ایک مشین کے پہیے کا رداس 49 سم ہے۔ بتایئے کہ اس پر تار کے ایک مکمل چکر کے لیے کتنا لمبا تار درکار ہو گا ؟

حل: رداس = r = 49 سم

دائرے کا محیط = $2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 49$$

= 308 سم

پس مطلوبہ تار کی لمبائی 308 سم ہے۔

مثال 3:

ایک گول میز پوش کا قطر 2.1 میٹر لمبا ہے۔ اس کے گرد لگانے کیلئے کتنے میٹر بیل درکار ہوگی؟

حل:

میٹر 2.1 = قطر کی لمبائی

میز پوش کا قطر $\times \pi$ = میز پوش کا محیط

یا = $\frac{22}{7} \times 2.1$

$= \frac{22}{\cancel{7}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{10} = \frac{66}{10} = 6.6$ میٹر

پس میز پوش کے لئے 6.6 میٹر بیل درکار ہوگی۔

مثال 4: ایک گول کیاری کے گرد ایک چکر 17.6 میٹر بنتا ہے۔ کیاری کا قطر معلوم کیجیے۔

حل:

17.6 میٹر = کیاری کا محیط

کیاری کا محیط = $2 \pi r$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 17.6$

دونوں طرف 7 سے ضرب دینے سے $7 \times \frac{2 \times 22}{\cancel{7}} \times r = 7 \times 17.6$

$r = \frac{7 \times 17.6}{2 \times 22}$

برابر ہے $r = 2.8$

قطر $= 2 \times r$

$= 2 \times 2.8$

= 5.6 میٹر

پس کیاری کا قطر 5.6 میٹر ہے۔

مشق نمبر 9.2

1. مندرجہ ذیل بیانات میں صحیح اور غلط کی نشان دہی کیجیے:

(i) مثلث کے چار راس ہوتے ہیں

(ii) ہر راس پر ایک اندرونی اور ایک بیرونی زاویہ ہوتا ہے۔

(iii) مثلث کے بیرنی زاویوں کا مجموعہ 180^{o} ہوتا ہے۔

(iv) مثلث کے ایک راس پر بنا ہوا ایک بیرونی زاویہ مثلث کے باقی دو اندرونی زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(v) دائرے کی پیمائش کو دائرے کا وتر کہتے ہیں۔

(vi) محیط اور رداس کی نسبت $\frac{22}{7}$ ہے

2. ایک پاکستانی روپے کا سکہ لے کر اس کے محیط کی پیمائش کریں۔

3. دائرے کا محیط معلوم کریں ,جبکہ اس کا رداس 63 سم ہو۔

4. دائرے کا محیط معلوم کریں جبکہ اس کا قطر 147 میٹر لمبا ہو۔

5. ایک گول عمارت کا رداس 714 میٹر ہے۔اس کے گرد چکر لگانے کے لیے 3 کلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے کتنا وقت لگے گا۔

6. ایک ڈرم کے پیندے پر 22 میٹر لمبی پٹی چڑھائی گئی ہے۔اس ڈرم کے پیندے کے قطر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7. 35 سم رداس کا پہیہ 660 میٹر سفر کرنے میں کتنے چکر لگائے گا؟

8. ایک گھڑی کی منٹ والی سوئی 14 سینٹی میٹر لمبی ہے۔بتایئے کہ وہ 24 گھنٹوں میں کتنا فاصلہ طے کرے گی۔

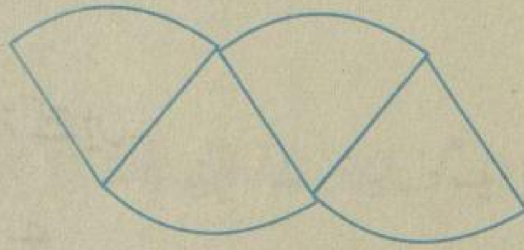
دائروی علاقے کا رقبہ

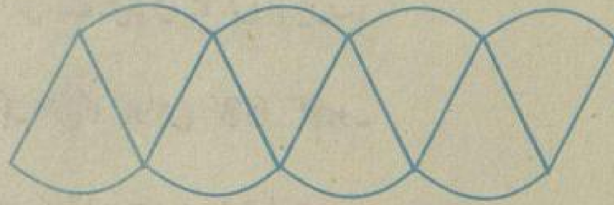
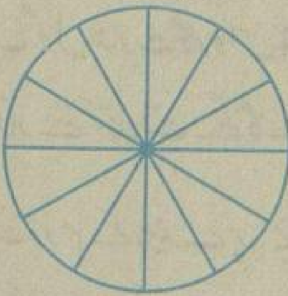
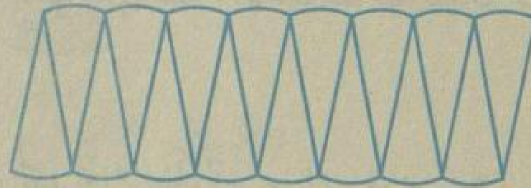
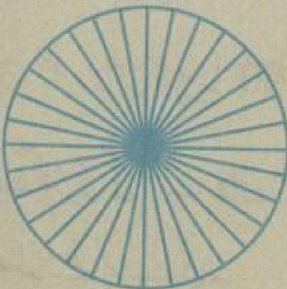
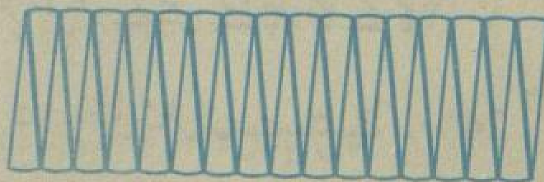
دائروی علاقے کا رقبہ ایک سرگرمی سے سیکھتے ہیں۔

(i) مناسب رداس کا ایک دائرہ کھینچیے۔

(ii) دائروی علاقے کو 16,8,4 اور 32 برابر حصوں میں تقسیم کریں۔ قینچی سے رداسی قطعات کو احتیاط سے کاٹیں۔

(iii) ان رداسی قطعات کو آپس میں جوڑیں تو ہمیں درج ذیل اشکال حاصل ہوتی ہیں۔

(iv) اگر اشکال (i) , (ii) اور (iii) پر غور کریں تو یہ اشکال متوازی اضلاع کی نہیں۔ جس میں آدھے سیکٹر کی نوکیں اوپر کی طرف اور آدھے سیکٹر کی نوکیں نیچے کی طرف باہم متصل ہیں۔

مستطیل علاقے کا رقبہ = دائروی علاقے کا رقبہ

مستطیل کی لمبائی X مستطیل کی چوڑائی =

دائرے کا نصف محیط X دائرے کا رداس =

$$= r \times \frac{1}{2}\ (2r\pi)$$

$$= \pi\ r^2$$

پس کسی بھی دائروی علاقے کا رقبہ πr^2 کے برابر ہوتا ہے جہاں r دائرے کا رداس ہے۔

دائروی علاقے کا رقبہ = πr^2

مثال1: ایک دائرے کا رداس 21 سم ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

حل: دائروی علاقے کا رقبہ = $\pi\ r^2$ ، $\pi = \frac{22}{7}$ یا $\pi =$ 3.14

$$= \pi\ (21)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

= 1386 مربع سم

مثال2: ایک دائروی علاقے کا رقبہ 616 مربع سم ہے۔ اس کا رداس معلوم کریں۔

حل: دائروی علاقے کا دیا ہوا رقبہ = 616 مربع سم

دائروی علاقے کا رقبہ = r^2

پس $\pi r^2 = 616$

$$\frac{22}{7} r^2 = 616$$

$$r^2 = \overset{28}{\cancel{616}} \times \frac{7}{22}$$

$$= 196$$

$$r = \sqrt{196} = 14$$

پس رداس 14 سم ہے۔

مثال 3: روبینہ کے پاس 1.4 میٹر لمبے قطر کی گول میز ہے۔اس میز کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: 1.4 میٹر = میز کے قطر کی لمبائی

0.7 میٹر = $\frac{1.4}{2}$ = r = رداس کی لمبائی

گول میز کا رقبہ = πr^2

یا $= \frac{22}{7} \times (0.7)^2$

یا $= \frac{22}{7} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10}$

1.54 مربع میٹر = $\frac{154}{100}$ =

مثال 4: ایک گول تالاب کی تہہ پر سیمنٹ کرانے کے خرچ بحساب 11 روپے فی مربع میٹر 1694 روپے ہے۔قطر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

آیئے! یہ سوال تناسب کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

حل:

رقبہ مربع میٹر : خرچ

تالاب کا رقبہ : 1 :: 1694 : 11

11 x تالاب کا رقبہ = 1694 x 1

154 مربع میٹر = $1694 \times \frac{1}{11}$ = تالاب کا رقبہ

لیکن πr^2 = تالاب کا رقبہ

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\frac{7}{22} \times \frac{22}{7} r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49$$

$$r = \sqrt{49} = 7$$

14 میٹر = 2 x 7 = 2r = تالاب کے قطر کی مقدار

مشق نمبر 9.3

① دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کریں، جبکہ رداس برابر ہے:

(i) 28 سم (ii) 4.9 میٹر

(iii) 42 سم (iv) 1.4 میٹر

② دائروی علاقے کے قطر معلوم کریں، جبکہ رقبہ برابر ہے:

(i) 154 مربع سم (ii) 2464 مربع سم

(iii) 3850 مربع میٹر (iv) 124.74 مربع سم

③ ایک گول میدان کا رقبہ معلوم کیجئے اگر اس کا قطر 126 میٹر لمبا ہو۔

④ ایک چوراہے کے درمیان ایک گول فوارہ بنایا گیا ہے۔ اس کا رداس 3 میٹر ہے۔ فوارے کا رقبہ بتائیے۔

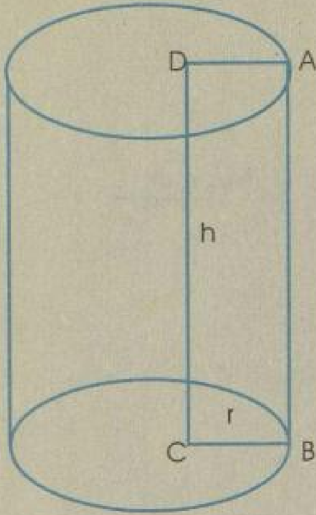
⑤ کھانے کی ایک گول میز پر بچھانے کے لئے ایک میز پوش بنایا گیا۔ میز پوش کا رداس ایک میٹر لمبا ہے۔ میز پوش کا رقبہ بتائیے۔

⑥ ایک گول باغ کا قطر 35 میٹر ہے۔ اس باغ میں 15.20 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں۔

⑦ مرکز سے ایک پنکھے کے پر کی لمبائی 10 سم ہے۔ بتائیے پنکھا ایک مکمل چکر میں کتنا رقبہ مکمل کرتا ہے۔

بیلن کا حجم اور سطحی رقبہ (Volume and surface area of cylinder)

بیلن (Cylinder)



سامنے دی ہوئی شکل ایک بیلن ہے۔ گھی اور تیل کے ڈبے اور تار کول کا ڈرم اور بہت سی ڈبوں میں بند چیزیں بیلن کی شکل کی ہوتی ہیں۔ کیا آپ چند چیزیں اور بھی سوچ سکتے ہیں جن کی شکل بیلن جیسی ہو؟ اگر آپ روپے کے سکے اوپر نیچے رکھتے چلے جائیں تو یہ تصویر کی طرح ایک بیلن کی شکل ہو گی۔ بیلن کی ہر افقی کاٹ سکے کی طرح دائروی ہو گی۔

(i) بیلن کا حجم (Volume of a cylinder)

ہمیں معلوم ہے کہ بیلن کا قاعدہ ایک دائروی سطح ہے۔ اس سطح کے رداس کو ہم r سے ظاہر کرتے ہیں۔
ہم پہلے دائروی علاقے کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

دائروی علاقے کا رقبہ = بیلن کے قاعدے کا رقبہ = r^2

اگر بیلن کی لمبائی یا بلندی h سے ظاہر کی جائے تو

بیلن کا حجم = دائروی علاقے کا رقبہ x بیلن کی بلندی

$= (\pi r^2) \times h = \pi r^2 h$

پس بیلن کا حجم = $\pi r^2 h$

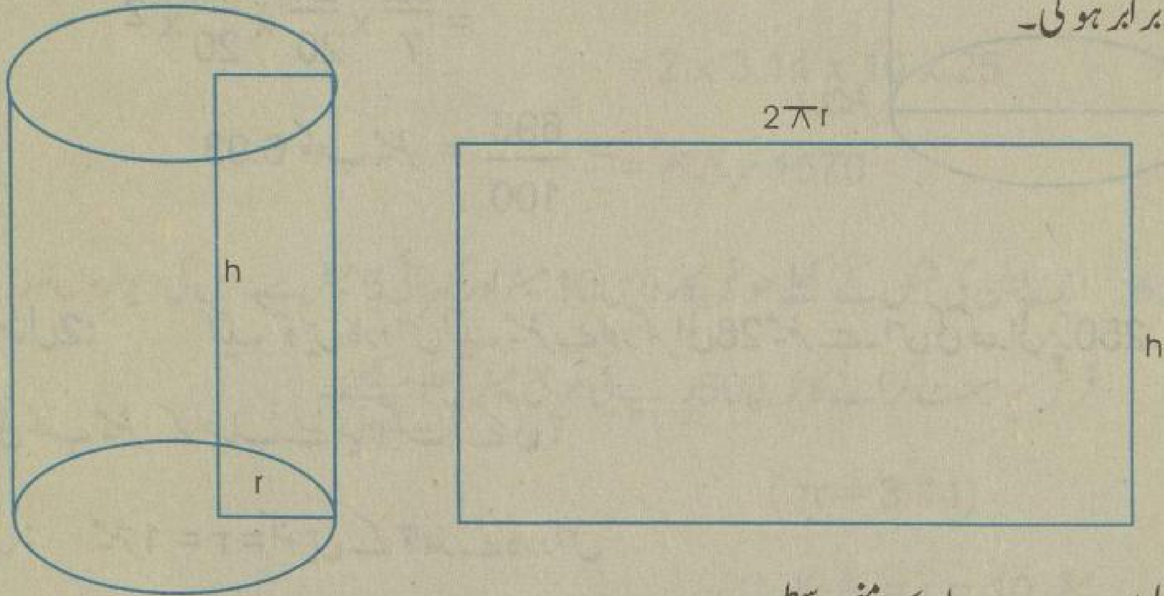
جہاں r بیلن کے قاعدے کا رداس اور h بیلن کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) بیلن کی سطح کا رقبہ (Surface Area of cylinder)

بیلن کی سطح کے تین حصے ہوتے ہیں۔ دو برابر دائروی سطحیں اور تیسری منحنی سطح ہوتی ہے۔
آیئے! ہم تینوں سطحوں کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔ بیلن کی دائروی سطح کا رداس r اور منحنی حصے کی لمبائی h سے ظاہر کرتے ہیں۔

$\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$ = بیلن کے دو دائروی علاقوں کا رقبہ

بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ایک کاغذ کا صفحہ لیتے ہیں جس کی چوڑائی بیلن کی بلندی کے برابر ہو۔ اس صفحے کو بیلن کے گرد لپیٹ کر فالتو حصہ کاٹ دیتے ہیں۔ کھولنے پر یہ کاغذ کا ٹکڑا مستطیل بن جائے گا۔ اس کاغذ کی چوڑائی h ہو گی اور لمبائی بیلن کے قاعدے، یعنی دائروی علاقے کے محیط کے برابر ہو گی۔



مستطیل کا رقبہ = بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ

= چوڑائی x لمبائی

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi r h$

$2\pi r \times h$ = بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ

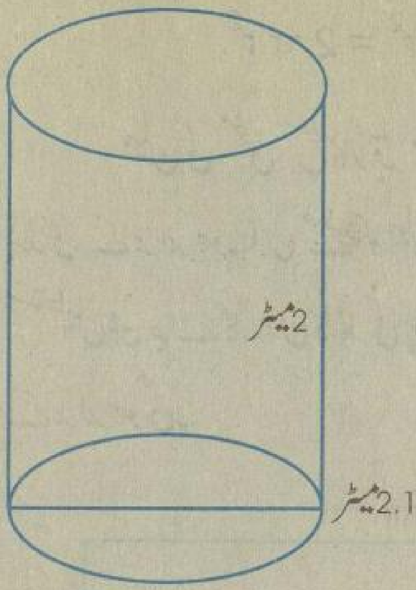
بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ + دو دائروی حصوں کا رقبہ = بیلن کی سطح کا کل رقبہ

$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$= 2\pi r (r + h)$

مثال 1: اگر پانی کی ایک گول ٹینکی کے قطر کی لمبائی 2.1 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہو تو اس ٹینکی کا حجم بتائیے۔

حل: $\frac{2.1}{2}$ میٹر = قطر $\frac{1}{2}$ = r = قاعدے کا رداس



h = بیلن کی بلندی = 2 میٹر

بیلن کا حجم $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{(2.1)^2}{(2)^2} \times 2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 2$

$= \frac{693}{100} =$ 6.93 مکعب میٹر

مثال 2: ایک کنویں کا رداس ایک میٹر ہے اور گہرائی 28 میٹر ہے۔ اس کی کھدائی پر 250 روپے فی مکعب میٹر کے حساب سے کیا لاگت آئے گی؟

حل: کنویں کے قاعدے کا رداس $= r = 1$ میٹر

کنویں کی گہرائی $= h = 28$ میٹر

کنویں کا حجم $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times (1)^2 \times 28$

= 88 مکعب میٹر

پس لاگت $= 88 \times 250$

= 22000 روپے

مثال 3: ایک بیلن کے قاعدے کا رداس 10 سم اور لمبائی 15 سم ہے۔ اس کی سطح کا کل رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: $(\pi = 3.14)$

$r = 10$ سم = قاعدے کارداس

$h = 15$ سم = لمبائی

بیلن کی سطح کا کل رقبہ $= 2\pi r (r + h)$

$= 2 \times 3.14 \times 10 (10 + 15)$

$= 2 \times 3.14 \times 10 \times 25$

$= 1570$ مربع سم

مثال4: ایک بیلن کی شکل کے کھلے حوض کارداس 10 میٹر اور گہرائی 5 میٹر ہے۔ اس کی دیواروں اور فرش پر سیمنٹ کرانے کا خرچ 50 روپے فی مربع میٹر معلوم کیجئے۔

$(\pi = 3.14)$

$r = 10$ میٹر = بیلن کارداس

$h = 5$ میٹر = گہرائی

بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\ rh$

$= 2 \times 3.14 \times 10 \times 5$

$= 314$ مربع میٹر

دائروی علاقے کا رقبہ = $r^2 = 3.14 \times (10)^2$

$= 314$ مربع میٹر

دائروی علاقے کا رقبہ + بیلن کی منحنی سطح کا رقبہ = حوض کی سطح کا کل رقبہ

$= 314 + 314 = 628$ مربع میٹر

سیمنٹ کرانے کا خرچ = $628 \times 50 = 31400$ روپے

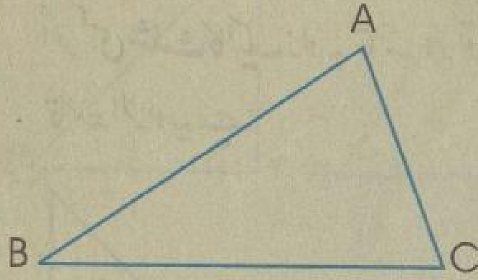
مشق نمبر 9.4

ذیل میں بیلن کے قاعدے کارداس اور بلندی دی گئی ہے۔ان کا حجم معلوم کریں:

1. سم 15 = بلندی، سم 10 = رداس
2. میٹر4.5 = بلندی، میٹر 3.5 = رداس
3. ڈیسی میٹر28 = بلندی، ڈیسی میٹر 20 = رداس
4. سم 5 = بلندی، سم 2.8 = رداس
5. میٹر2.5= بلندی، میٹر 1.05 = رداس
6. ایک بیلن نما ٹینک کا قطر12 میٹر لمبا ہے اور اس کی بلندی 14 میٹر ہے۔ بیلن کا حجم معلوم کیجیے۔
7. ایک بیلن نما ٹینک کا قطر14 میٹر لمبا ہے اور اس کا حجم 1540 مکعب میٹر ہے تو اس کی بلندی معلوم کیجیے۔
8. اگر 3.5 میٹر گہرے بیلن نما گڑھے کے منہ کا رداس1.5 میٹر ہو تو اسے بھرنے کے لئے کتنے مکعب میٹر مٹی ڈلوانا ہو گی؟ $(\pi = 3.14)$
9. بیلن کے متعلق ذیل کے جدول میں نامعلوم مقداریں لکھیے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

کل سطح کارقبہ	بلندی	قطر کی مقدار	رداس
	6 میٹر		(i) 14 میٹر
	10سم	8.4 سم	(ii)
528 مربع ڈم			(iii) 6 ڈم
1540 مربع سم			(iv) 10سم

مثلث اور ان کے زاویے



سامنے دی ہوئی شکل ایک مثلث کی ہے جس کے تین اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ ہیں۔ یہ قطعات خط مثلث کے اضلاع کہلاتے ہیں۔ مثلث کے تین زاویے $A\hat{B}C$، $B\hat{C}A$ اور $C\hat{A}B$ ہیں۔ ہم علامتی طور پر مثلث ABC کو ABC △ لکھتے ہیں، یعنی علامت △ مثلث کو ظاہر کرتی ہے۔ نقاط A، B اور C مثلث کے راس کہلاتے ہیں۔

ہم نے چھٹی جماعت میں پڑھا تھا کہ :

(i) 0° اور 90° کے درمیانی زاویہ کو حادہ زاویے (Acute Angles) کہلاتے ہیں۔

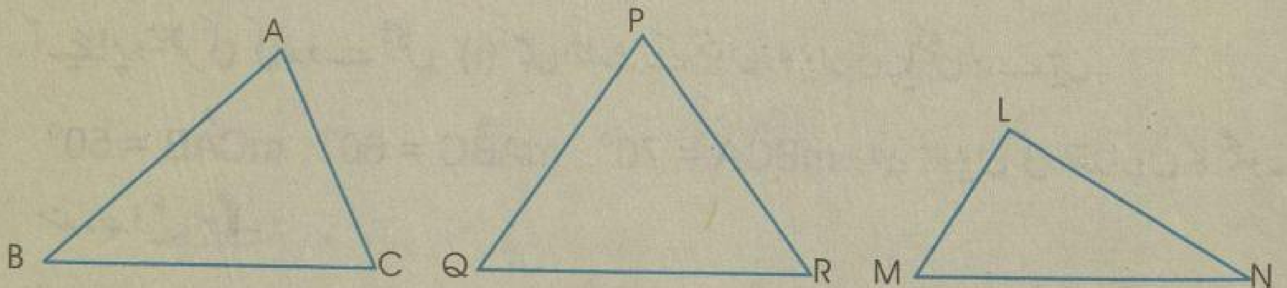
(ii) 90° کے زاویے قائمہ زاویے (Right Angles) کہلاتے ہیں۔

(iii) 90° اور 180° کے درمیانی زاویہ کو منفرجہ زاویے (Obtuse Angles) کہلاتے ہیں۔

مثلث کی قسمیں :

(1) حادۃ الزاویہ مثلث

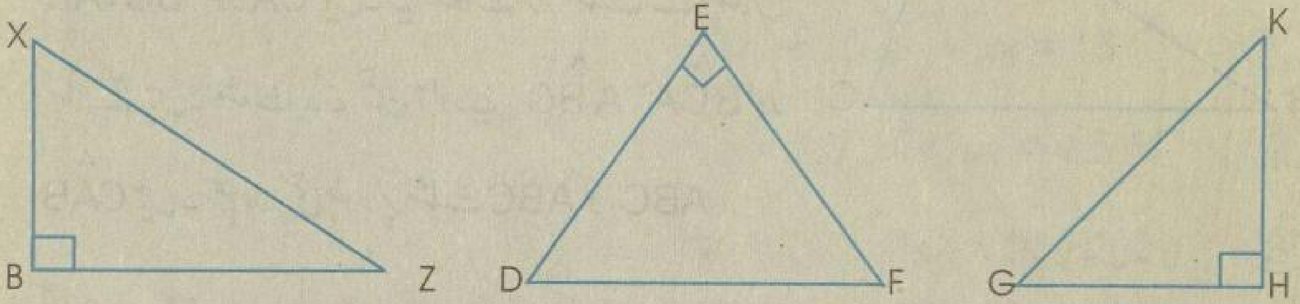
ایسے مثلث جن کا ہر زاویہ حادہ ہو، حادۃ الزاویہ مثلث کہلاتے ہیں۔ مندرجہ ذیل شکلوں میں ABC △



PQR △ اور LMN △ میں سے ہر مثلث ایک حادۃ الزاویہ مثلث ہے کیونکہ ان کے تمام زاویے حادہ ہیں۔

قائمۃ الزاویہ مثلث

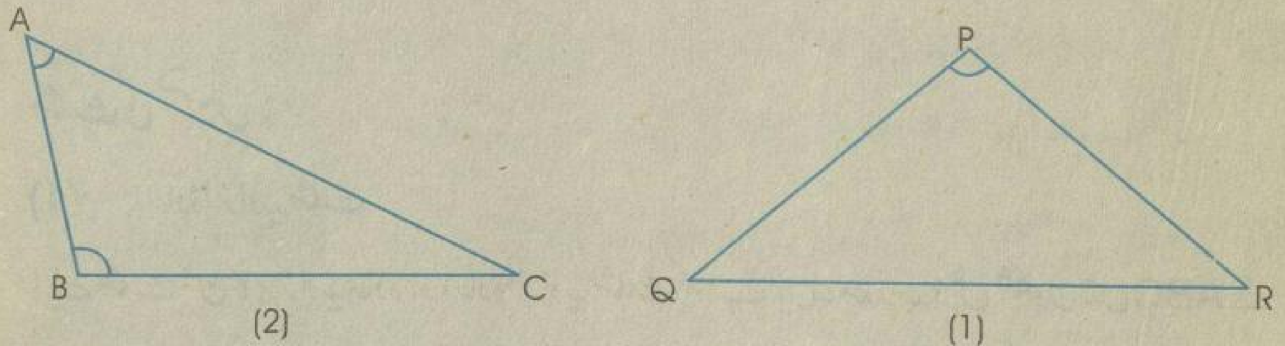
اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو اسے قائمۃ الزاویہ مثلث کہتے ہیں۔ نیچے دی ہوئی اشکال میں ہر مثلث قائمۃ الزاویہ ہے:



$\triangle$ XYZ کا زاویہ XYZ قائمہ ہے۔

$\triangle$ EDF کا زاویہ DEF قائمہ ہے۔ اسی طرح $\triangle$ GHK کا زاویہ GHK قائمہ ہے۔ قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویے کے مقابل کا ضلع وتر (Hypotenuse) کہلاتا ہے۔

اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ منفرجہ ہو تو ایسے مثلث کو منفرجۃ الزاویہ مثلث کہتے ہیں۔ نیچے دی ہوئی شکلوں میں $\triangle$ ABC کا زاویہ B منفرجہ ہے۔ اسی طرح $\triangle$ PQR کا زاویہ Q منفرجہ ہے۔



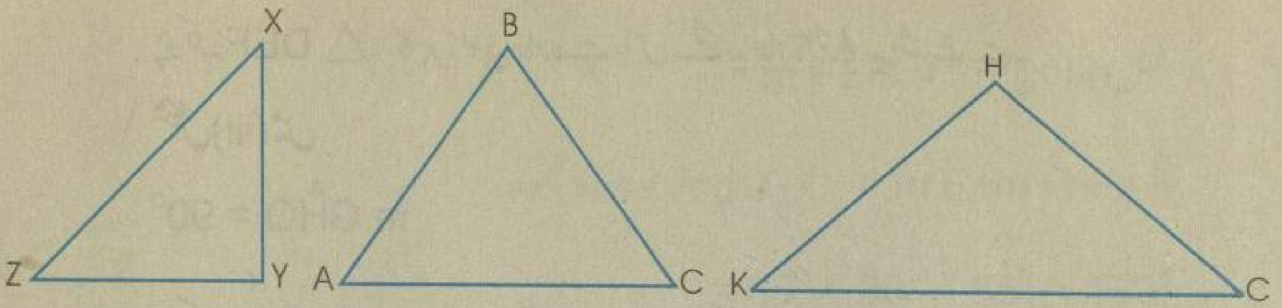
آیئے! پروٹیکٹر کی مدد سے شکل (i) میں مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کرتے ہیں۔

$m\hat{BCA} = 70^o$, $m\hat{ABC} = 60^o$, $m\hat{CAB} = 50^o$ ان زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ مندرجہ ذیل ہوگا۔

$$m\hat{ABC} + m\hat{BCA} + m\hat{CBA} = 60^o + 70^o + 500^o = 180^o$$

اب آپ شکل (ii) کے زاویوں کی مقدار پروٹیکٹر سے ناپیے۔

$$m\hat{XYZ} = 90^o , m\hat{YXZ} = 40^o , m\ \hat{YZX} = 50^o$$



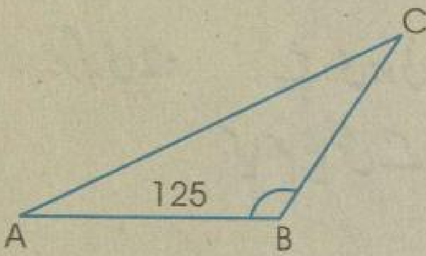
ان زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ مندرجہ ذیل ہوگا:

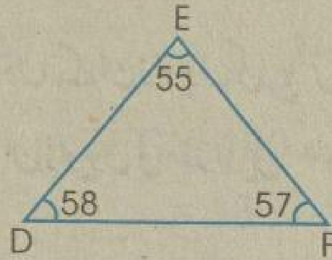
$$m X\hat{Y}Z + m Y\hat{X}Z + m\, Y\hat{Z}X = 90^\circ + 40^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

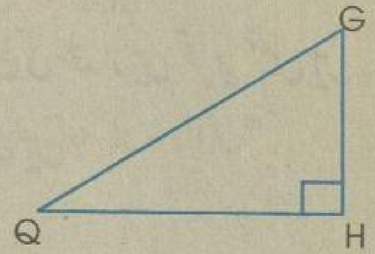
اسی طرح شکل (iii) میں HKG△ کے زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ بھی 180° ہے۔

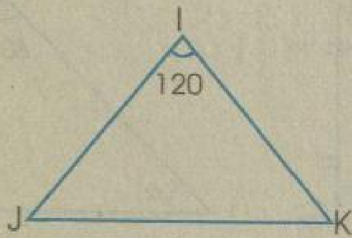
پس ہر صورت میں کسی مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ **180°** ہوتا ہے۔

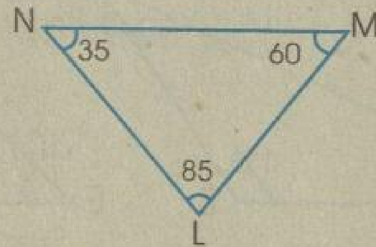
سرگرمی 1: نیچے دی ہوئی مثلثوں کے زاویوں کی پیمائش کر کے بتائیں کہ یہ کس قسم کی مثلثیں ہیں۔











حل: شکل(i) میں $m\, A\hat{B}C = 125^\circ$

چونکہ یہ منفرجۃ الزاویہ ہے اس لئے ABC△ ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث ہے۔

شکل(ii) میں

$$m\, D\hat{E}F = 55^\circ,\ m\, E\hat{F}D = 57^\circ,\ m\, E\hat{D}F = 68^\circ$$

چونکہ DEF △ کا ہر زاویہ حادہ ہے، اس لئے یہ حادۃ الزاویہ مثلث ہے۔

شکل (iii) میں

$m\,G\hat{H}Q = 90^\circ$

چونکہ یہ قائمہ زاویہ ہے، اس لئے GHQ △ ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

شکل (iv) میں $m\,J\hat{I}K = 120^\circ$

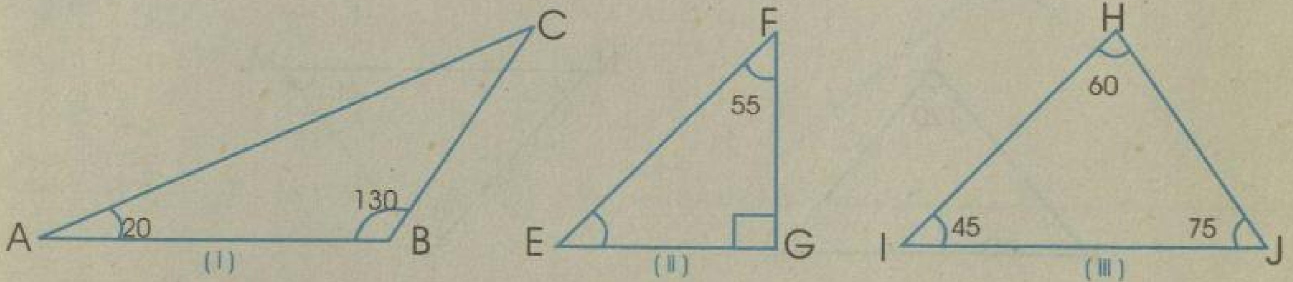
چونکہ یہ منفرجہ زاویہ ہے، اس وجہ سے IJK △ ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث ہے۔

اسی طرح شکل نمبر (v) میں $m\,L\hat{M}N = 60^\circ,\ m\,M\hat{N}L = 35^\circ$

$m\ \hat{MLN} = 85^\circ$

یہ تینوں حادہ زاویے ہیں۔ اس لئے یہ ایک حادۃ الزاویہ مثلث ہے۔

سرگرمی 2: نیچے دی ہوئی مثلثوں کے ان زاویوں کی پیمائش کیجئے جن کی مقداریں تحریر نہیں ہیں۔
کیا ہم پیمائش کے بغیر ان زاویوں کی مقداریں معلوم کر سکتے ہیں؟



حل: پروٹریکٹر کی مدد سے ہم زاویوں کی پیمائش کرتے ہیں۔

شکل (i) $m\,A\hat{C}B = 30^\circ$

زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ $= m\,\hat{A} + m\,\hat{B} + m\,\hat{C}$

$= 20^\circ + 130^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

شکل(ii)میں $m\,F\hat{E}G = 35^\circ$

زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ $= m\,\hat{E} + m\,\hat{G} + m\,\hat{F}$

$= 35^\circ + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

شکل(iii) میں $m\,I\hat{J}H = 75^\circ$

یہاں بھی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہے۔

پس اگر ہمیں مثلث کے دو زاویوں کی مقدار معلوم ہو اور ہم ان کے مجموعے کو 180° سے تفریق کریں تو ہمیں تیسرے زاویے کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے۔

شکل(i)میں $m\,A\hat{C}B = 180^\circ - (130^\circ + 20^\circ)$

$= 180^\circ - 150^\circ$

$= 30^\circ$

شکل(ii)میں $m\,E\hat{F}G = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ)$

$= 180^\circ - 125^\circ$

$= 55^\circ$

اسی طرح شکل (iii)میں $m\,I\hat{j}H = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ)$

$= 180^\circ - 105^\circ$

$= 75^\circ$

سرگرمی 3: مثلث کے زاویہ B کی مقدار معلوم کیجئے۔

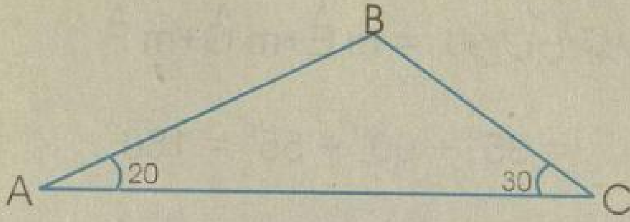
جبکہ $m\,\hat{A} = 20^\circ$

$m\,\hat{C} = 30^\circ$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $m\,\hat{A} + m\,\hat{B} + m\,\hat{C} = 180^\circ$

پس $m\hat{B} = 180^\circ - (m\,\hat{A} + m\,\hat{C})$

$= 180^\circ - (20^\circ + 30^\circ)$



$= 180^\circ - 50^\circ$

$= 130^\circ$

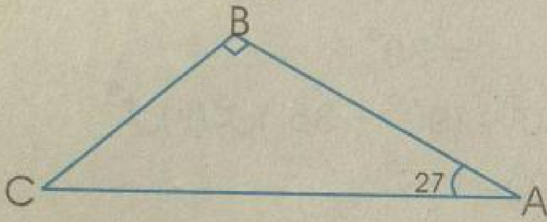
سرگرمی 4:

قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے حادہ زاویوں کی مقدار معلوم کیجئے، جبکہ ایک زاویہ دیا ہوا ہو۔

(i) $m A = 27^\circ$ (ii) $m A = 45^\circ$

حل: (i) ABC میں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ

$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$

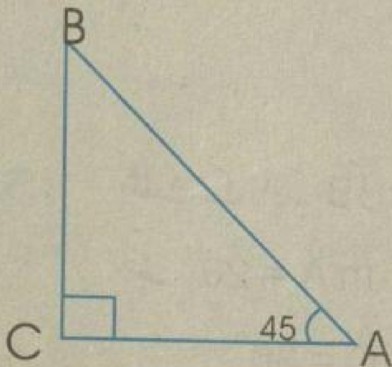


ہمیں معلوم ہے کہ $m\hat{A} = 27^\circ$ اور $m\hat{B} = 90^\circ$

پس $m\hat{C} = 180^\circ - (27^\circ + 90^\circ)$

$= 180^\circ - 117^\circ$

$= 63^\circ$



(ii) ABC میں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ

$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$

ہمیں معلوم ہے کہ $m\hat{C} = 90^\circ$ اور $m\hat{A} = 45^\circ$

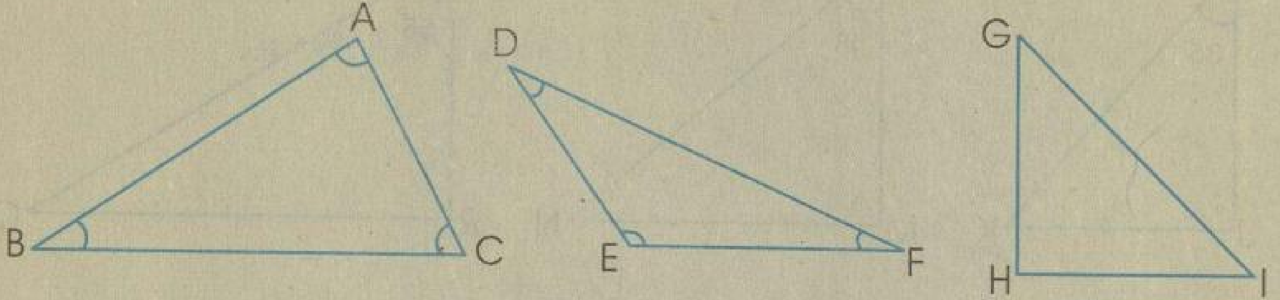
$m\hat{B} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ)$

$= 180^\circ - 135^\circ$

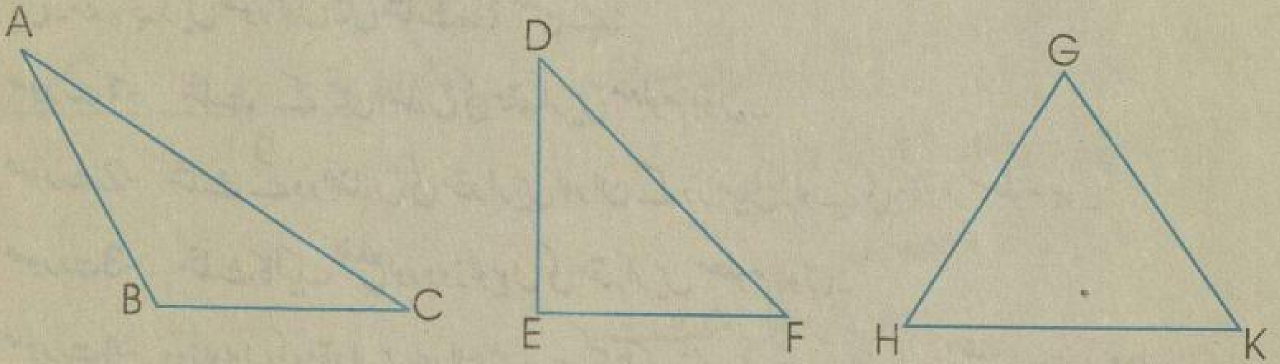
$= 45^\circ$

مشق نمبر 9.5

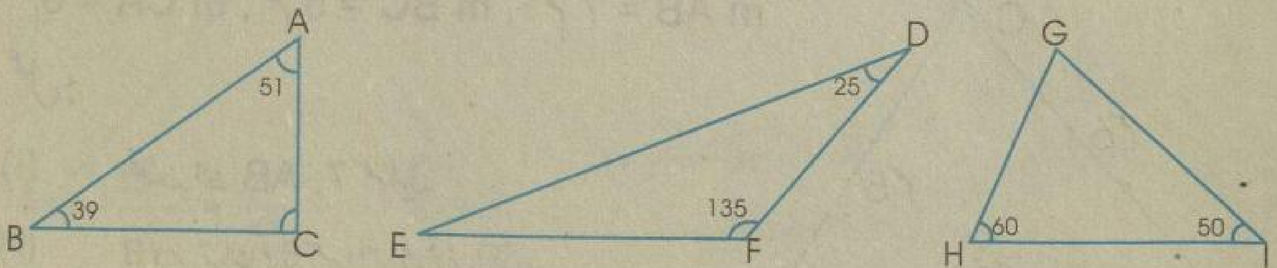
(1) مندرجہ ذیل مثلثوں کے زاویوں اور ضلعوں کی پیمائش کیجئے اور بتایئے کہ یہ مثلث کس قسم کے ہیں:



(2) نیچے دی ہوئی مثلثوں کے زاویوں کی پیمائش کیجئے اور پڑتال کیجیے کہ ہر مثلث کے زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

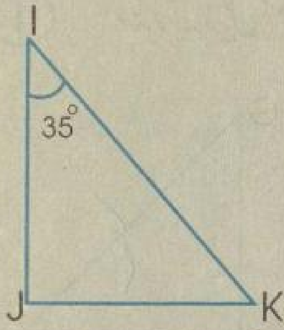


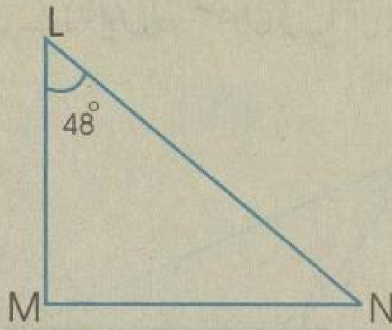
(3) نیچے دی ہوئی مثلثوں کے ان زاویوں کی پیمائش کیجئے جن کی مقداریں درج نہیں۔ کیا ہم بغیر پیمائش کے ان زاویوں کی مقداریں معلوم کر سکتے ہیں؟

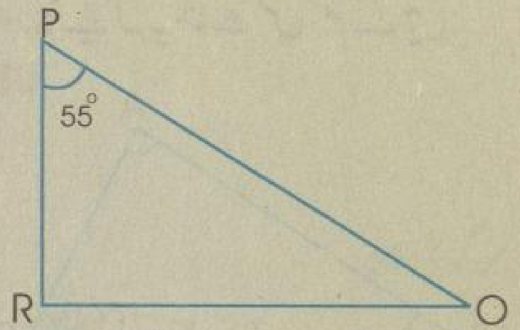


(4) قائمہ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی مقداریں معلوم کیجئے، جبکہ ایک زاویے کی مقدار معلوم ہو۔

(i) $m\hat{I} = 35^\circ$ (ii) $m\hat{L} = 48^\circ$ (iii) $m\hat{P} = 55^\circ$







مثلث بنانا Construction of triangle

کسی مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویے مثلث کے چھ عناصر کہلاتے ہیں۔ اگر ان چھ عناصر میں سے کوئی سے تین عناصر اس طرح دیئے ہوئے ہوں کہ ان میں کم از کم ایک ضلع کی مقدار معلوم ہو تو ہم مثلث بنا سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں مثلث بنانا ممکن ہے:

صورت 1- مثلث کے تین اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں۔

صورت 2- مثلث کے دو اضلاع کی مقداریں اور ان کے درمیانی زاویے کی مقدار معلوم ہو۔

صورت 3- مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویوں کی مقداریں معلوم ہوں۔

صورت 4- دو زاویوں کی مقداریں اور ان میں سے کسی ایک زاویے کے سامنے والے ضلع کی مقدار معلوم ہو۔

آیئے! اب ہم باری باری مثلث بنانے کے طریقے سیکھتے ہیں۔

1- مثلث بنانا، جبکہ تینوں اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں۔

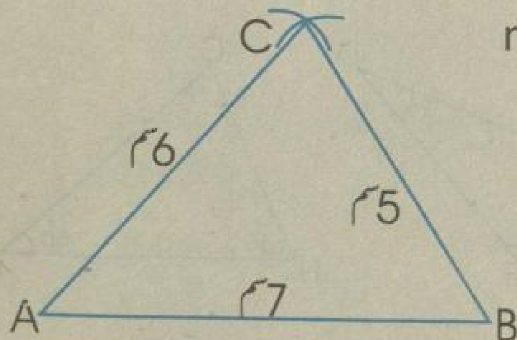
سرگرمی نمبر 1: مثلث ABC بنایئے، جبکہ

$m\overline{AB} = 7$ سم , $m\overline{BC} = 5$ سم , $m\overline{CA} = 6$ سم

عمل:

(i) قطعہ خط AB ,7 سم لیا۔

(ii) B کو مرکز مان کر 5 سم رداس کی قوس لگائی۔



(iii) A کو مرکز مان کر 6 سم رداس کی قوس لگائی جس نے پہلی قوس کو نقطہ C پر قطع کیا۔

(iv) نقطہ C کو نقاط A اور B سے ملایا۔

پس ABC $\triangle$ مطلوبہ مثلث ہے۔

مثلث بنانا، جبکہ دو اضلاع کی مقداریں اور درمیانے زاویے کی مقدار معلوم ہو۔

سرگرمی 2: مثلث ABC بنائیں جبکہ

$m\,A\hat{B}C = 60^\circ$

$m\,\overline{AB} = 6$ سم ، $m\,\overline{BC} = 5$ سم

عمل:

(i) قطعہ خط AB 6 سم کھینچا۔

(ii) نقطہ B پر پروٹریکٹر کی مدد سے 60° کا زاویہ ABD بنایا۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر 5 سم کے رداس کی ایک قوس لگائی جو BD کو نقطہ C پر قطع کرتی ہے۔

(iv) نقطہ C کو نقطہ A سے ملایا۔

پس ABC $\triangle$ مطلوبہ مثلث ہے۔

3- مثلث بنانا، جبکہ دو زاویوں اور درمیانی ضلع کی مقدار معلوم ہو۔

سرگرمی 3: مثلث ABC بنائیں، جبکہ

$m\,C\hat{A}B = 55^\circ$ ، $m\,C\hat{B}A = 70^\circ$ ، $m\,\overline{AB} = 5$ سم

عمل:

(i) قطعہ خط $\overline{AB}$ 5 سم کھینچا۔

(ii) پروٹریکٹر سے نقطہ A پر $R\hat{A}B$ 55° کا زاویہ بنایا۔

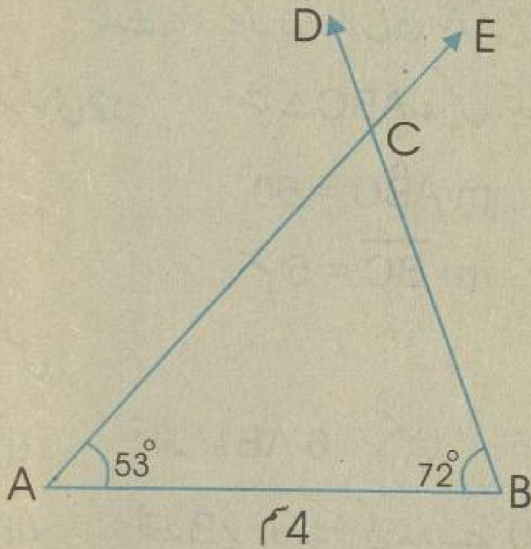
(iii) نقطہ B پر $S\hat{B}A$ 70° کا زاویہ بنایا۔

اس طرح سے $\overline{BS}$ اور $\overline{AR}$ ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتے ہیں۔

پس ABC △ مطلوبہ مثلث ہے۔

4- مثلث بنانا، جبکہ دو زاویوں کی مقداریں اور ان میں سے ایک کے مقابل ضلع کی مقدار معلوم ہو۔

سرگرمی 4: مثلث ABC بنائیں جبکہ



$m\hat{B} = 72^\circ$، $m\hat{C} = 55^\circ$ ، $m\overline{AB} = 4$سم

عمل:

(i) قطعہ خط $\overline{AB}$, 4سم لیا۔

(ii) نقطہ B پر 72° کا زاویہ بنایا جو $A\hat{B}D$ ہے۔

(iii) ہمیں معلوم ہے کہ

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$m\hat{A} = 180^\circ - (m\hat{B} + m\hat{C})$$

$$= 180^\circ - (72^\circ + 55^\circ)$$

$$= 180^\circ - 127^\circ$$

$$= 53^\circ$$

(iv) اب نقطہ A پر پروٹریکٹر کی مدد سے $B\hat{A}E$ 53° کا زاویہ بنائیں۔

(v) $\overline{AE}$ نے $\overline{BD}$ کو نقطہ C پر قطع کیا۔

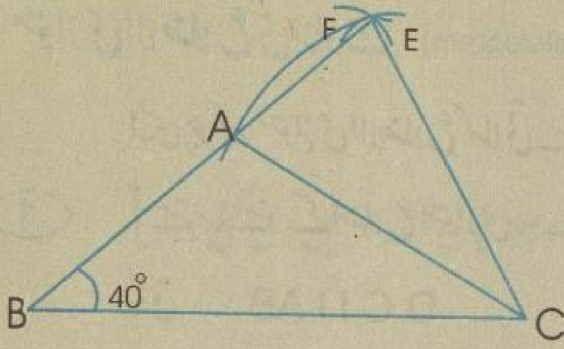
پس ABC △ مطلوبہ مثلث ہے۔

سرگرمی 5: مثلث ABC بنائیں، جبکہ

$m\overline{AC} = 5$ سم، $m\overline{BC} = 6$ سم، $m\hat{B} = 40^\circ$

عمل:

(i) $\overline{BC}$ 6 سم کھینچا



(ii) نقطہ B پر $C\hat{B}E$ 40° کا زاویہ بنایا۔

(iii) نقطہ C کو مرکز مان کر 5 سم رداس کی قوس لگائی

(iv) جس نے $\overline{BE}$ کو نقاط A اور F پر قطع کیا۔

(v) قطعاتِ خط $\overline{AC}$ اور $\overline{CF}$ کھینچے۔

پس ABC مطلوبہ مثلث ہے۔اسی طرح BFC بھی مطلوبہ مثلث ہے کیونکہ یہ دونوں مثلثان دی گئی شرائط کو پورا کرتی ہیں۔

مشق نمبر 9.6

1. مثلث ABC بنائیں، جس کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں :

(i) $m\overline{AB} = 6$ سم، $m\overline{BC} = 5$ سم، $m\overline{CA} = 3$ سم

(ii) $m\overline{AB} = 8$ سم، $m\overline{BC} = 4$ سم، $m\overline{CA} = 5$ سم

2. مثلث ABC بنائیے، جن کے دو اضلاع اور درمیانی زاویے کی پیمائش مندرجہ ذیل ہے :

(i) $m\overline{AB} = 5.8$ سم، $m\overline{BC} = 4.5$ سم، $mB = 60^{\circ}$

(ii) $m\overline{AB} = 5$ سم، $m\overline{BC} = 4$ سم، $mB = 105^{\circ}$

3. مثلث ABC بنائیں، جبکہ دو زاویوں اور درمیانی ضلعے کی مقداریں مندرجہ ذیل ہوں :

(i) $mA = 50^{\circ}$، $mB = 60^{\circ}$، $m\overline{AB} = 4$ سم

(ii) $mA = 110^{\circ}$، $mB = 35^{\circ}$، $m\overline{AB} = 5$ سم

4. مثلث LMN بنائیے جبکہ دو زاویوں اور ایک زاویے کے مقابل ضلع کی مقدار معلوم ہو۔

(i) $m\overline{LN} = 4.5$ سم، $m\hat{M} = 62^{\circ}$، $m\hat{L} = 50^{\circ}$

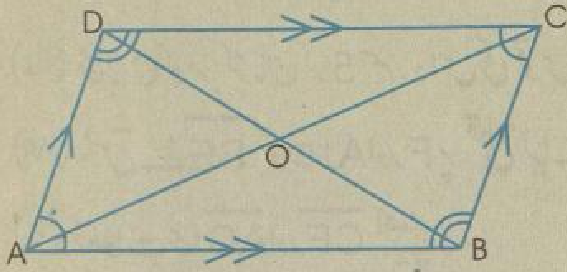
(ii) $m\overline{LN} = 5.5$ سم، $m\hat{M} = 75^{\circ}$، $m\hat{N} = 60^{\circ}$

5. مثلث بنائیں، جبکہ

(i) $m\hat{A} = 50^{\circ}$، $m\overline{BC} = 5$ سم، $m\overline{AB} = 6$ سم

(ii) $m\overline{AC} = 5.5$ سم $m\hat{C} = 80^{\circ}$, $m\overline{AB} = 6$ سم

متوازی الاضلاع کی بناوٹ (Construction of a Parallelogram)



ایسی چوکور متوازی الاضلاع کہلاتی ہے جس میں

1. آمنے سامنے کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

یعنی $DC \parallel AB$

اور $BC \parallel AD$

2. آمنے سامنے کے اضلاع مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

یعنی $AB = DC$ اور $AD = BC$

3. آمنے سامنے کے زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

یعنی $\hat{A} = \hat{C}$ اور $\hat{B} = \hat{D}$

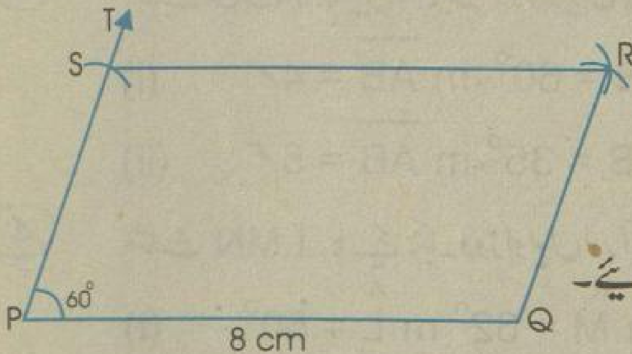
4. متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

یعنی $AO = OC$ اور $BO = OD$

متوازی الاضلاع بنانا جبکہ اس کے دو متصلہ اضلاع اور ان کے درمیان زاویہ کی مقدار دی گئی ہو۔

ایک متوازی الاضلاع PQRS بنائیے جس میں

$m\overline{PQ} = 8cm$ ، $m\overline{PS} = 5cm$ ، $S\hat{P}Q = 60$



مدارج عمل

1. قطعہ خط $PQ = 8cm$ لمبا کھینچیے۔
2. پروٹریکٹر کی مدد سے نقطہ P پر 60° کا زاویہ بنائیے۔
نقطہ P پر ایک شعاع PT کھینچیے۔
3. نقطہ P کو مرکز مان کر 5cm کی رداس کی قوس لگائیں جو کہ شعاع PT کو نقطہ s پر قطع کرتی ہے۔
4. نقطہ Q کو مرکز مان کر 5cm رداس کی قوس لگائیں۔
5. نقطہ s کو مرکز مان 8cm رداس کی قوس اس طرح لگائیں جو کہ پہلی قوس کو نقطہ R پر قطع کرے

6 نقاط QR اور S,R کو آپس میں ملائیں۔

پس PQRS مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

متوازی الاضلاع بنانا جبکہ ایک وتر اور دو متصل اضلاع کی مقداریں دی گئی ہوں

1 متوازی الاضلاع PQRS بنائیے جبکہ

$m\overline{PQ} = 6cm$ ، $m\overline{QR} = 3.5cm$ ، $m\overline{PR} = 4.5cm$

مدارج حل

1 قطعہ خط PQ=6cm لمباء کھینچا۔ جو کہ وتر ہے۔

2 نقطہ Q کو مرکز مان کر 4.5cm رداس کی قوس لگائی۔ جو کہ قطعہ خط PQ کے اوپر کی طرف ہے۔

3 نقطہ Q کو مرکز مان کر 3.5cm رداس کی قوس لگائی جس نے دی ہوئی قوس کو نقطہ R پر قطع کیا۔

4 نقاط P.R اور Q.R کو آپس میں ملائیں۔

5 نقطہ P کو مرکز مان کر 3.5cm رداس کی قوس خط $\overline{PQ}$ کے نیچے کی طرف لگائیں۔

6 نقطہ Q کو مرکز مان کر 4.5cm رداس کی قوس لگائی جس نے پہلی قوس کو نقطہ s پر قطع کیا۔

7 نقاط P.S اور Q.S کو آپس میں ملائیں۔

لہٰذا PQRS مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

R
4.5 cm
3.5 cm
P
6 cm
Q
3.5 cm
4.5 cm
S

مشق نمبر 9.7

(1) مندرجہ ذیل خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے اضلاع ______ اور مقدار میں ______ ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے زاویے مقدار میں ______ ہوتے ہیں۔

(iii) زوزنقہ ایک متوازی لاضلاع ______ ہے۔

(iv) مستطیل ایک ______ ہے۔

(v) ہر چوکور متوازی الاضلاع ______ ہے۔

جوابات

باب نمبر 1 :

مشق نمبر 1.1

1- (i) ، (ii) اور (v) سیٹ کو ظاہر کرتے ہیں۔

2- A اور D سیٹ ہیں۔

3- (iv) $\not\subset$ (iii) $\not\subset$ (ii) $\in$ (i) $\not\subset$

4- (v) درست (iv) درست (iii) غلط (ii) درست (i) درست

(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط

5- (v) صحیح (iv) صحیح (iii) غلط (ii) غلط (i) صحیح

مشق نمبر 1.2

1- A = {a, b, c, d, e, f, g, h} B = {2, 3, 5, 7, 11)

C = { -4,-3,-2,-1,0,1,2 } D = {1,2,3,4,6,8,12,16,24,48}

E = {3, 6, 9, ...}

2- A = پہلے 5 قدرتی اعداد کے مربعوں کا سیٹ

B = دس کے پہلے 5 اضعاف کا سیٹ

C = انگلش کے پہلے 6 حروف تہجی کا سیٹ

3- A متناہی B متناہی C متناہی

x غیر متناہی w غیر متناہی N غیر متناہی

مشق نمبر 1.3

1- A U B = { 4, 5, 6, 8, 10 } ، A ∩ B = {4, 6}

2- A U B = { 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 } ، A ∩ B = {2, 4}

3- A U B = { 1, 3, 5, 7, 9, 11 } ، A ∩ B = { 1, 3, 5, 7, 11 }

4- A U B = { a, b, c, d, e, i, o, u } ، A ∩ B = {a, e}

5- A U B = { اتوار، پیر، منگل، بدھ، جمعرات، جمعہ، ہفتہ } ، A ∩ B = {بدھ، جمعرات}

6- $A \cup B$ = {2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18} , $A \cap B$ = {6,12}

7- $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 8, 10} , $A \cap B$ = {2,4}

8- $A \cup B$ = { 1,2,3,4,5,8,9,10 } , $A \cap B$ = { 3, 5, 7, 9 }

9- $A \cap C$ = { 2, 4, 6, 8 } , $A \cap B$ = {1, 3, 5, 7}

$A \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} = $A \cup B$

10- (i) جی ہاں (ii) جی ہاں (iii) نہیں

مشق نمبر 1.4

(i) AUB = {1,2,5,7,8} , AnB = {5,7}

(ii) AUB = {1,2,3,5,7} , AnB = {3,5}

(iii) AUB = {0,1,2,-2} , AnB = {1}

(iv) AUB = {2,3,6,8,a,b,e,d} , AnB = { }

(v) AUB = {3,6,9,12,15,18,21,24,30} , AnB = {6,12,18,24}

باب نمبر 2:

مشق نمبر 2.1

1: (i) -88 (ii) -196 (ii) 98 (iv) -108 (v) 0 (vi) -800

2: (i) 8 (ii) -14 (iii) -20 (iv) 20 (v) 1 (vi) 0

3: (i) 24 (ii) 6 (iii) +8 (iv) -2 (v) 2 (vi) - 4

مشق نمبر 2.2

(i) - 64 (ii) - 64 (iii) -20 (iv) 30 (v) 30 (vi) 35

(vii) -13 (viii) -10 (ix) 2 (x) 25 (xi) 5 (xii) 4 (xiii) $\frac{3}{2}$

باب نمبر 3:

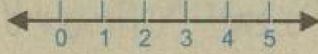
مشق نمبر 3.1

1: (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) صحیح (v) صحیح

2: (i)



(ii)



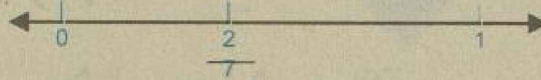
(iii)



(iv)



3: (i)



(ii)



(iii)



مشق نمبر 3.2

(1) جمع کی خاصیت مبادلہ

(2) جمع کی خاصیت مبادلہ

(3) جمع کی خاصیت تلازم

(4) جمعی ذاتی عنصر

(5) ضربی معکوس

(6) ضربی ذاتی عنصر

(7) ضرب کی خاصیت مبادلہ

(8) جمعی معکوس

(9) خاصیت بندش

(10) ضرب کی خاصیت مبادلہ

(11) ضرب کی خاصیت تلازم

(12) ضربی معکوس

(13) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

(14) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

(16) جی ہاں

(17) $-\frac{3}{4}, -\frac{15}{7}, 0$

(18) $\frac{3}{8}, -\frac{8}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ ضربی معکوس ہیں۔

مشق نمبر 3.3

1: (i)0.6 (ii)0.83 (iii)0.45 (iv)0.769230 (v)0.26
(vi) 0.94 (vii)0.227 (viii)0.5416 (ix)0.481 (x)0.87 (xi)0.31

2: (i) متوالی 0.6 (ii) اختتامی 0.6 (iii) متوالی 2.333 (iv) متوالی 0.2857142
(v) اختتامی 0.625 (vi) متوالی 0.7 (vii) متوالی 0.27 (viii) متوالی 0.26
(ix) متوالی 0.72 (x) اختتامی 0.88 (xi) متوالی 0.67 (xii) متوالی 0.67
(xiii) اختتامی 0.68 (xiv) اختتامی 0.65

باب نمبر 4:

مشق نمبر 4.1

1: 26 2: 33 3: 70 4: 169 5: 22 6: 32 7: 24 8: 25
9: 30 10: 21 11: 41 12: 40 13: 45 14: 70 15: 62 16: 64
17: 60 18: 84 19: 270 20: 90

مشق نمبر 4.2

(i) $\frac{12}{15}$ (ii) $\frac{18}{21}$ (iii) $\frac{35}{99}$ (iv) $1\frac{1}{12}$ (iv) $1\frac{2}{11}$

مشق نمبر 4.3

(1) 110 میٹر (2) 44 سپاہی (3) 77 درخت (4) 21 میٹر (5) 81 قطاریں

مشق نمبر 4.4

(1)1.8 (2)2.1 (3)2.3 (4)2.7 (5)25 (6)6.1 (7)2.8 (8)3.2
(9)5.5 (10)10 (11)2.9 (12)3.1 (13)3.1 (14)5.6 (15)5.9 (16)32
(17)36 (18)120 میٹر (19)75 طلباء

باب نمبر5:

مشق نمبر 5.1

(1) 20%　(2) نقصان 11.11%　(3) نفع 12.50%　(4) نفع 25%　(5) نفع 8.13

مشق نمبر 5.2

(1) 1080 روپے　(2) 26 روپے فی کلوگرام　(3) 10400 روپے　(4) 675 روپے
(5) 2280 روپے　(6) 3500 روپے　(7) 180 روپے　(8) 3000 روپے
(9) 586 روپے　(10) 8050 روپے

باب نمبر6:

مشق نمبر 6.1

(1) (i) 11:2　(ii) 4:5　(iii) 1:4　(iv) 6:7　(2) نمبر45
(3) (i) 6:5　(ii) 1:6　(4) آدھا کلو اور 2 کلو
(5) 62.5 سم　(6) $3\frac{3}{5}$ کلوگرام　(7) 20　(8) 250 کلوگرام
(9) $\frac{7}{11}$　(10) نہیں، اصل نسبت 13:47 ہے

مشق نمبر 6.2

(1) 3:7:2　(2) 35:42:48　(3) 24:20:25　(4) 221:238:224
(5) 21:6:8　(6) 12:15:25　(7) 35:81
(8) بندے 2400 روپے، انگوٹھی 4000 روپے، چین 3000 روپے
(9) ہاشم 900 روپے، خالد 720 روپے، اطہر 1170 روپے

مشق نمبر 6.3

(1) 1620 روپے، 1080 روپے
(2) 800 روپے ہر ایک کا حصہ
(3) 640 روپے، 800 روپے، 960 روپے
(4) 600, 1500, 900, 3000
(5) 2500, 15000
(6) 1800 روپے، 1890 روپے، 990 روپے
(7) 4200 روپے، 2100 روپے
(8) 40%، 60%

باب نمبر 7:

مشق نمبر 7.2

(1) (i) تین (ii) دو (iii) دو (iv) چار

(2) (i) ایک درجی (ii) دو درجی (iii) تین درجی (iv) تین درجی (v) چار درجی (vi) پانچ درجی (vii) پانچ درجی

مشق نمبر 7.3

(1) $13a$ (2) $2a$ (3) $-15x$ (4) $2ab$ (5) $7y$ (6) $8a + 8b$

(7) $14a + 18b + 17c$ (8) $7x + 2y$ (9) $9ab + 9cd + 12ad$

(10) $8a + 7b + 6c$ (11) $12a + 7.5b + 8.3c$ (12) $27 (a + b + c)$

(13) $11a^2 - 6b^2$ (14) $11a^2 + 13b^2 + c^2$ (15) $25e - f + 12g$

مشق نمبر 7.4

(1) $3a$ (2) $-29ab$ (3) $12a^2$ (4) $4a + 4b$

(5) $4a + 8b + 16c$ (6) $14c + 4d + 3e$ (7) $8x + 7y + 4z$

(8) $6a^2 + 5b^2 + 18c^2$ (9) $7ab + 27bc + 3cd$ (10) $a^2 + ab + b^2$

مشق نمبر 7.5

(1) $120a^2$ (2) $54ab$ (3) $20a^7$ (4) $32c^6d^2$

(5) $30 a^2b^3$ (6) $9a + 6b$ (7) $2a^3 + 2ab^2 + 2ac^2$

(8) $24c^2 + 24d^2 + 132cd$ (9) $a^2 + 2ab + b^2$ (10) $a^4 - b^4$

(11) $a^2 + b^2 + c^2 + 2 (ab + ac + bc)$ (12) $a^2 + b^3 + 2ab (a+b)$

مشق نمبر 7.6

(1) $4x$ (2) $3a$ (3) X^2 (4) $5a^3$ (5) 6 (6) $2pq$ (7) $5z^2$ (8) $3a + 2b$
(9) $a + 2b$ (10) $2a + 3b$ (11) $2c + 7d$

مشق نمبر 7.7

(1) (i) 7 (ii) 1 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{3}$ (v) 5 (vi) 2 (vii) 2 (viii) 8 (ix) 5
(x) 15 (xi) 12 (xii) $\frac{64}{9}$

(2) (i) 4 (ii) 38 (iii) $\frac{9}{2}$ (iv) $\frac{5}{11}$ (v) $\frac{4}{9}$ (vi) $\frac{3}{22}$ (vii) 2 (viii) 0 (ix) 216
(x) 13 (xi) $\frac{1}{20}$ (xii) $\frac{71}{27}$

مشق نمبر 7.8

(1) مساواتیں = (i) , (ii) , (iv) , (vi)

غیر مساواتیں = (ii) , (v) , (vii)

(2) (i) صحیح

(ii) غلط

(iii) صحیح

(vi) غلط

(v) صحیح

مشق نمبر 7.9

(1) 4 (2) 6 (3) 34 (4) $\frac{7}{2}$ (5) 3 (6) 2 (7) 12 (8) $-\frac{9}{8}$
(9) -15 (10) $-\frac{11}{2}$

مشق نمبر 7.10

(1) 5 (2) 24 (3) 21·22 (4) لمبائی = 16.5 میٹر ، چوڑائی = 15 میٹر

(5) پہلا عدد 3 اور دوسرا عدد 6 ہے (6) AB = 30 سم , BC = 40 سم , AC = 33 سم

(7) مسلسل اعداد = 15, 16, 17 (8) مطلوبہ اعداد = 27, 29, 31, 33

(9) 8 سم (10) حسن کے پاس = 64 ماربل ، اصغر کے پاس = 16 ماربل

مشق نمبر 7.11

(1) (i) -9 (ii) -1 (iii) 2 (iv) 11 (v) -3 (vi) 1

(2) (i) 34 (ii) 3 (iii) $\frac{9}{4}$

(3) نورین کے پاس = 200 روپے ، کامران کے پاس = 100 روپے

باب نمبر 9:

مشق نمبر 9.1

(1) (a) 48 سم (b) 138 مربع سم (c) 3.61 مربع سم

(d) 13.31 مربع سم (e) 500 مربع سم

(2) 200 مربع سم (3) 3750 روپے

مشق نمبر 9.2

(1) (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط

(3) 396 سم (4) 462 میٹر (5) 1.496 گھنٹے (6) 7 میٹر (7) 300 چکر (8) 2112 سم

مشق نمبر 9.3

(1) (i) 2464مربع سم (ii) 75.46مربع میٹر (iii) 5544مربع سم (iv) 6.16مربع میٹر

(2) (i) 14سم (ii) 56سم (iii) 70میٹر (iv) 12.6میٹر

(3) 12474مربع میٹر (4) $28\frac{2}{7}$ مربع میٹر (5) $3\frac{1}{7}$ مربع میٹر

(6) 14630روپے (7) 314سم

مشق نمبر 9.4

(1) $4714\frac{2}{7}$ مکعب سم (2) 173.25مکعب سم (3) 35200مکعب ڈیسی میٹر

(4) 123.2مکعب سم (5) 8.6625مکعب سم (6) مکعب میٹر

(7) 10میٹر (8) 24.7275مکعب میٹر

(9) (i) قطر = 28 میٹر   رقبہ = 1760 مربع میٹر

(ii) رداس = 4.2سم   رقبہ = 374.88 مربع سم

(iii) قطر = 12ڈم   بلندی = 8ڈم

(iv) قطر = 20سم   بلندی = 14.5سم

مشق نمبر 9.5

عملی کام طلباء خود کریں

مشق نمبر 9.6

دیئے ہوئے مواد کے مطابق طلباء خود مثلث بنائیں۔

مشق نمبر 9.7

(1) (i) برابر،متوازی (ii) برابر (iii) نہیں (iv) متوازی الاضلاع (v) نہیں

تیار کردہ: بلوچستان ٹیکسٹ بک بورڈ کوئٹہ، منظور کردہ محکمہ تعلیم حکومت بلوچستان

بطور واحد نصابی کتاب برائے مدارس صوبہ بلوچستان

بمطابق نوٹیفکیشن نمبر No-2308-36/10-Book/GB مورخہ

نظر ثانی شدہ: نیشنل ریویو کمیٹی وفاقی وزارت تعلیم حکومت پاکستان

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد　　کشورِ حسین شاد باد
تُو نشانِ عزمِ عالی شان　　ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد
پاک سرزمین کا نظام　　قوّتِ اخوّتِ عوام
قوم مُلک سلطنت　　پائندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد
پرچم ستارہ و ہلال　　رہبرِ ترقّی و کمال
ترجمانِ ماضی شانِ حال　　جانِ استقبال
سایۂ خُدائے ذُوالجلال

نیو نساء پرنٹرز سعید احمد روڈ کوئٹہ

سیریل نمبر　　کوڈ نمبر M-vii-UN/300

سالِ اشاعت	ایڈیشن	تعداد اشاعت	قیمت
2004	اول	25,000	21:00